VŠB – Technická univerzita Ostrava
Fakulta elektrotechniky a informatiky
Katedra informatiky

Hry na Grafech

Games on Graphs

2017

Radek Vokáč

VŠB - Technická univerzita Ostrava
Fakulta elektrotechniky a informatiky
Katedra aplikované matematiky

Zadání bakalářské práce

Student:	**Radek Vokáč**
Studijní program:	B2647 Informační a komunikační technologie
Studijní obor:	1103R031 Výpočetní matematika
Téma:	Hry na grafech Games on Graphs
Jazyk vypracování:	čeština

Zásady pro vypracování:

V posledních letech jsou hry na grafech populárním tématem jak rekreační matematiky, tak odborných studií. Obvykle se jedná o hry, kde každý z hráčů má jiné úlohy. Například první hráč se snaží dosáhnout předepsané konfigurace, zatímco druhý hráč se mu v tom snaží zabránit (hry typu "maker-breaker" nebo "avoider-forcer"). Méně časté jsou analogie klasických deskových her modifikované pro rovinné či obecné grafy.

Cílem bakalářské práce je vypracovat systematický přehled her rozdělený do jednotlivých kategorií. Pro každou hru chceme zjistit, zda a v jakých variantách je známa vítězná strategie pro některého hráče, pravděpodobnosti výhry pro některého hráče nebo jaké jsou známé vlastnosti, například minimální a maximální počet kol a podobně.

Speciální zřetel má být věnována motivaci pro vznik těchto her. Zajímají nás zejména hry, které byly fomrulovány v rámci řešení jiného problému a hra je pouze modelem tohoto problému v jazyku her (například "pebbling").

Dalším cílem je pak připravit shrnutí otevřených problémů týkajících se her na grafech. Na takový seznam by mohly navázat další práce.

Seznam doporučené odborné literatury:

- M. Matoušek, J. Nešetřil, Kapitoly z Diskrétní matematiky, Karolinum Praha, 2000.
- M. Stojaković, Games on Graphs, PhD Thesis, ETH Zürich, 2005.
- D. West, Graph Theory, Prentice-Hall, Upper Saddle River NJ, 2001.
- P. Kovář, Teorie grafů, VŠB-TU Ostrava, 2012.

Formální náležitosti a rozsah bakalářské práce stanoví pokyny pro vypracování zveřejněné na webových stránkách fakulty.

Vedoucí bakalářské práce: **doc. Mgr. Petr Kovář, Ph.D.**

Datum zadání: 01.09.2016

Datum odevzdání: 28.04.2017

doc. RNDr. Jiří Bouchala, Ph.D.
vedoucí katedry

prof. RNDr. Václav Snášel, CSc.
děkan fakulty

Prohlašuji, že jsem tuto diplomovou práci vypracoval samostatně. Uvedl jsem všechny literární prameny a publikace, ze kterých jsem čerpal.

V Ostravě 27. dubna 2017 ....

Souhlasím se zveřejněním této diplomové práce dle požadavků čl. 26, odst. 9 Studijního a zkušebního řádu pro studium v magisterských programech VŠB-TU Ostrava.

V Ostravě 27. dubna 2017 ....

Rád bych na tomto místě poděkoval vedoucímu práce doc. Mgr. Petru Kovářovi, Ph.D., který mi s prací pomohl, protože bez něj by tato práce nevznikla.

Abstrakt

Cílem práce bylo vypracovat systematický přehled her rozdělených do jednotlivých kategorií, popsat vlastnosti vybraných her a připravit shrnutí otevřených problémů, na které by mohly navázat další práce. Jedná se o přehledovou práci, kde čerpám z mnoha různých zdrojů a hlavním výsledkem práce je shrnutí informací z těchto zdrojů do přehledné struktury. Na úvod jsem uvedl základní pojmy související s tématem, kterému se práce věnuje, a přehledně jsem popsal přístup k dělení her. Ve zbytku práce se věnuji hlavně představení konkrétních vybraných her, kde je hlavním tématem diskuze o strategiích a jsou popsány některé důkazy těchto strategií. Na závěr je uveden seznam her, jejich rozdělení do kategorií, kde jsou zahrnuty jak hry, kterým jsem se věnoval ve své práci, tak další známější hry, na které se už v práci nedostalo, ale jsou typově podobné uvedeným hrám. Práce je ukončena přehledem otevřených problémů u her, které jsme v práci představili.

Klíčová slova: Hra, Teorie grafů, Teorie her, Strategie, Dělení her

Abstract

The purpose of the thesis was to develop a systematic overview of games divided into various categories, describe the characteristics of the selected games and prepare a summary of open problems on which someone could build his further work. This thesis is an overview work, where I draw from many different sources and the main result of the thesis is a summary of the information from these sources into a clear structure. In the introduction I stated the basic concepts related to the topic, to which the work is dedicated, and I described the approach to the classification of games. The rest of the work is devoted mainly to the detailed description of selected games, where the main topic of discussion are strategies and we described some of the proofs of these strategies. In the conclusion, there is a list of games, their division into categories, that include games, which I introduced and also further types of games, which are not in thesis, but they are similar to games in the thesis. We close the thesis by giving an overview of open problems for games that were in the thesis presented.

Key Words: Game, Graph theory, Game theory, Strategy, Types of games

Obsah

Seznam obrázků **10**

Seznam tabulek **12**

1 Úvod **13**

2 Základní pojmy a dělení her **14**
2.1 Základní Pojmy 14
2.2 O teorie grafů 16
2.3 O teorii her 16
2.4 Základní dělení her 18
2.5 Kombinatorické hry 20

3 Rozbor vybraných her **21**

4 Šprouti **22**
4.1 Charakteristika hry 22
4.2 Klasická varianta 24
4.3 Varianta Misère 25
4.4 Podvodní šprouti 26

5 Hex **27**
5.1 Charakteristika hry 27
5.2 Spernerovo Lemma 29
5.3 Důkaz o nemožnosti remízy 30
5.4 Strategie 31

6 Sim **33**
6.1 Charakteristika hry 33
6.2 Ramseyova věta a důkaz nemožnosti remízy 34

7 Hexapawn **35**
7.1 Charakteristika hry 35
7.2 Strategie 36

8 Andělův Problém **38**
8.1 Charakteristika hry 38
8.2 Strategie 39
8.3 Důkaz, že anděl o síle 1 prohraje 40

8.4 Důkaz, že anděl nemůže vyhrát neustálým se vzdalováním od počátku 42
8.5 Důkaz, že anděl o síle dva vyhraje 43

9 Chomp **45**
9.1 Charakteristika hry 45
9.2 Strategie 45

10 Conway Soldiers **47**
10.1 Charakteristika hry 47
10.2 Strategie 48
10.3 Důkaz, že páté řady nelze dosáhnout 50

11 Piškvorky **52**
11.1 Charakteristika hry 52
11.2 Strategie 52
11.3 Piškvorky 3x3 53
11.4 Trojrozměrné Tic-Tac-Toe 58
11.5 Klasická varianta 60

12 Bridge-it **61**
12.1 Pravidla 61
12.2 Strategie 61
12.3 Popis vítězné strategie přes párování 62
12.4 Popis vítězné strategie přes kostry grafu 63

13 Hra na četníky a zloděje **65**
13.1 Pravidla 65
13.2 Strategie a cop-number 65

14 Další typy her **68**
14.1 Spojovací hry 68
14.2 Patrolovací hry 68
14.3 Hra Nim 68

15 Otevřené Problémy **69**

16 Závěr **71**

Literatura **76**

Seznam obrázků

1 Tabulka výsledků hry z pohledu začínajícího hráče podle hypotézy 24
2 Tabulka dokázaných výsledků hry z pohledu začínajícího hráče 24
3 Tabulka výsledků hry z pohledu začínajícího hráče podle hypotézy 25
4 Tabulka dokázaných výsledků hry z pohledu začínajícího hráče 25
5 Hrací plán hry hex 27
6 Ukázka jedné z možných triangulací 29
7 Vítězná strategie druhého hráče na upraveném hracím plánu 31
8 Hrací plán hry Sim 33
9 Výchozí situace 35
10 Herní strom pro první dva tahy 36
11 Tabulka s přehledem vítězných strategií 37
12 Ukázka jedné z herních pozic a rozsahu pohybu anděla 38
13 Trojitý blok proti překročení přímky 40
14 Začátek tvorby blokády 40
15 Uzavření anděla 41
16 Přizpůsobování tvorby zdi podle pohybu anděla 42
17 Snaha o vytvoření zdi kolem anděla 44
18 Rozšíření zakázaných políček 44
19 Umístění kamenů potřebné pro dosažení druhé řady 48
20 Umístění kamenů potřebné pro dosažení třetí řady 48
21 Umístění kamenů potřebné pro dosažení čtvrté řady 49
22 Znázornění vzdáleností některých políček od políčka S 50
23 Očíslování hracího plánu 53
24 Začátek obrany hráče O proti počátečnímu tahu na kraj 54
25 Schéma obrany hráče O proti počátečnímu tahu na kraj 54
26 Začátek obrany hráče O proti počátečnímu tahu do rohu 55
27 Schéma obrany hráče O proti počátečnímu tahu do rohu 55
28 Nevyhnutelná porážka hráče O po špatném začátku 56
29 Začátek obrany hráče O proti počátečnímu tahu doprostřed 56
30 Tři větve obrany hráče O proti počátečnímu tahu doprostřed 56
31 Začátek poslední větve obrany hráče O proti počátečnímu tahu doprostřed 57
32 Porážka hráče X 57
33 Obrana hráče O ve zbývajících možnostech průběhu hry 57
34 Možnosti vítězství v Tic-Tac-Toe 3x3x3 58
35 Počet vítězných trojic procházejících jednotlivými políčky 3x3x3 59
36 Ukázka remízové pozice 60
37 Hrací plán hry Bridge-it 61

38 Obrázek znázorňující vítěznou strategii prvního hráče 62
39 Zjednodušené schéma hry bridge-it 62
40 Dvě hranově disjunktní kostry grafu 63
41 Spojení obou koster 63
42 Ukázka grafu, kde má četník vítěznou strategii 65
43 Ukázka grafu, kde má zloděj vítěznou strategii 66
44 Přehled typů grafu s maximálním cn(G) 67

Seznam tabulek

1 Přehled existence strategií . . . 74
2 Přehled řešení hry . . . 74
3 Odkazy na hry . . . 74

1 Úvod

Cílem práce je vypracovat systematický přehled her na grafech rozdělený do jednotlivých kategorií. U většiny her je graf buď přímo hracím plánem, ale v práci se objeví i hry, u kterých není souvislost s teorií grafů na první pohled vidět. U takových her je obvykle možné hrací plán převést na graf, případně teorie grafů slouží k vysvětlení určitých vlastností hry.

Nejprve si uvedeme dělení her podle základních kritérii, ze kterého budeme vycházet a uvedeme si základní pojmy související s rozborem her. Zaměříme se především na kombinatorické hry, protože splňují určité vlastnosti, které nám usnadňují popis her.

Při popisu her budeme hlavně vycházet ze dvou částí matematiky, které jsou známé jako teorie her a teorie grafů. Pomocí těchto částí matematiky budeme analyzovat herní strategie a důležité vlastnosti her. Právě hledání strategií je cílem většiny analýz, týkají se kombinatorických her.

2 Základní pojmy a dělení her

Než se pustíme do rozboru samotných her, uvedeme si hlavní pojmy, které budeme často používat a na které navážeme v dalších částech práce. Také si uvedeme základní dělení her. Hry jsou samozřejmě rozsáhlé téma, proto je také mnoho různých způsobů, jak lze k dělení her přistupovat. Při dělení her jsem vycházel ze studijní opory Zdeňka Sawy [2] a snažil jsem se vybrat hlavní kategorie, podle kterých budeme vybrané hry rozdělovat.

2.1 Základní Pojmy

Graf

Graf G je uspořádaná dvojice $G = (V, E)$, kde V je neprázdná množina vrcholů a E je množina hran – množina (některých) dvouprvkových podmnožin množiny V.

Tah

Akce vyvolaná hráčem v nějakém okamžiku během hry. V našich vybraných hrách se hráči vždy střídají v tazích a tahem obvykle bude přesunutí kamene na hracím plánu, nebo obsazení volného políčka určitým symbolem.

Strategie

Plánovaná, nebo předem daná posloupnost tahů, kde se střídají tahy jednoho a druhého hráče.

Optimální Strategie

Optimální strategie je taková strategie, od níž žádná odchylka nemůže přinést hráči výhodu, za předpokladu, že druhý hráč zachová svojí optimální strategii. Neznamená to však, že hráč, používající optimální strategii nikdy neprohraje. Dvojice optimálních strategií pak tvoří Nashovu rovnováhu.

Nashova rovnováha

Nashova rovnováha [2] je taková situace ve hrách dvou nebo více hráčů, kde hráči navzájem nemohou spolupracovat. Každý z hráčů má určitou strategii a pokud platí, že žádný z hráčů nemůže změnou své strategie získat výhodu, za předpokladu, že ostatní hráči svou strategii nezměnili, pak strategie všech hráčů dohromady tvoří Nashovu rovnováhu. Nashova rovnováha je jedním ze základních pojmů v teorii her, ale používá se především ve hrách, kde hraje roli náhoda, nebo kde rozlišujeme výši výhry. V případě kombinatorických her na grafech však nebudeme Nashovu rovnováhu využívat, protože se týká trochu odlišné oblasti her. Například ve hře kámen-nůžky papír tvoří Nashovu rovnováhu dvojice optimálních strategií, kde oba hráči vždy zvolí kámen, nůžky, nebo papír s pravděpodobností 13. Je však důležité Nashovu rovnováhu zmínit, protože se jedná o jeden ze základních a důležitých pojmů teorie her. V kombinatorických hrách pojem Nashova rovnováha nevyužijeme a budeme se zabývat hlavně hledáním vítězné a neprohrávají strategie.

Vítězná Strategie

Strategie, která vždy zaručuje jednomu z hráčů vítězství. Chápeme ji jako strategii, která nemusí být pokaždé stejná, ale na jakýkoliv tah soupeře jsme schopni odpovědět svým tahem a hru po konečném počtu tahů vyhrát. Zde už je rozdíl oproti optimální strategii, která nezaručuje neporazitelnost. Vítězná strategie nám naopak vždy zajistí, že ve hře zvítězíme, bez ohledu na to, jak hraje náš soupeř.

Neprohrávající Strategie

Platí podobná logika jako u vyhrávající strategie s tím rozdílem, že zde nám neprohrávající strategie nezaručuje vítězství, ale pouze, že neprohrajeme. Pokud je posloupnost tahů konečná, znamená to, že jsme schopni se dostat do situace, kdy nelze ve hře pokračovat a nikdo hru nevyhrál. Říkáme, že nastává remíza.

U některých typů her však posloupnost tahů nemusí být konečná a součástí vyhrávající i neprohrávající strategie může být unikat, nebo prodlužovat hru libovolně dlouho. Například u hry nazvané Andělův problém není cílem anděla dostat se do určité pozice, která mu přímo zajistí vítězství, ale anděl se stane vítězem hry jen tehdy, pokud je schopen neustále unikat.

Dominovaná Strategie

Taková strategie, která nepřináší žádnou výhodu oproti jiné strategii nezávisle na tom, co udělá soupeř. Například představme si, že hrajeme hru kámen, nůžky, papír a oba hráči mají z nějakého důvodu zakázáno hrát nůžky. V tom případě je hraní kamene dominovaná strategie, protože ať soupeř udělá cokoliv, z našeho pohledu bylo vždy lepší hrát papír. Jde nám hlavně o to, abychom při analýze her vyloučili ze hry všechny takové tahy, které vedou například k jasné porážce.

2.2 O teorie grafů

[1] Teorie grafů je obor diskrétní matematiky, který zkoumá vlastnosti struktur, kterým říkáme grafy. Smyslem teorie grafů je převedení obecných problémů do matematiky a následně řešení těchto problémů. Reálná situace je modelována jako množina objektů, kterou symbolizují vrcholy grafu a vztahy mezi objekty zase chápeme jako hrany grafu. Výhodou je, že často můžeme narazit na situaci, která představuje nějaký obecný problém, který už byl jednou řešený. Po převedení problému do teorie grafů můžeme použít již známe algoritmy a s jejich využitím nalézt řešení. Za vznik teorie grafů se považuje rok 1736, kdy Leonard Euler řešil známý problém zvaný Sedm mostů města Královce. Dnes má teorie grafů široké využití v různých oborech. Teorie grafů se používá například v mapách, dopravě, logistice, geometrii, informačních technologiích a také v teorii her. Mnoho logických her můžeme znázornit pomocí teorie grafů a dále na grafech můžeme snadno analyzovat strategie hráčů a vlastnosti těchto her, a právě touto problematikou se budu ve své práci zabývat.

2.3 O teorii her

[2] Teorie her je část aplikované matematiky, která se zabývá konfliktními rozhodovacími situacemi z matematického hlediska. Pojem hra můžeme chápat více způsoby. Buď jako klasickou společenskou hry, kterou hrajeme hlavně pro zábavu, a nebo hry mohou podobně jako teorie grafů představovat problémy například z ekonomie, matematiky, nebo společenských věd.

Základním pojmem je antagonistický konflikt, který charakterizuje většinu her, kterými se budeme zabývat. Zjednodušeně jde o to, že úspěch jednoho z hráčů je možný pouze na úkor úspěšnosti ostatních hráčů. Hráči mezi sebou nemohou spolupracovat a smyslem her je, že hráči hrají proti sobě a vyhrát může jen jeden z nich.

Ve hrách tedy dochází ke střetu dvou nebo více hráčů, kde každý z hráčů má povoleny určité akce a každý hráč se snaží dosáhnout určitého cíle. Důležité je, aby hry nezávisely pouze na náhodě, jako je tomu například u loterií. Hráč musí být schopen svých chováním ovlivnit průběh hry. Akce, které hráči mohou provádět a cíle jednotlivých hráčů jsou stanoveny pravidly hry, které vždy znají všichni hráči.

Při studiu her se typicky zabýváme otázkami ohledně strategií hráčů, jejich existencí a vlastnostmi. Zjišťujeme, zda pro některého z hráčů existuje vítězná nebo neprohrávající strategie a často se snažíme nalézt možné optimální strategie, které nás dovedou k určitému cíli nezávisle na tom, jak hraje náš soupeř. Ve hrách také budeme předpokládat, že hráči hrají racionálně a snaží se hru vyhrát. Nemůže tedy dojít k situaci, kdy jeden z hráčů úmyslně prohraje nebo úmyslně upřednostní špatný tah a ze hry automaticky vylučujeme takzvané dominované strategie.

Při rozboru her budeme často používat argument o kradení strategie, který popsal John Nash v roce 1940 [3].

Argument o kradení strategie

Ve hrách dvou hráčů za určitých podmínek nemůže druhý hráč mít vyhrávající strategii. Důkaz se provádí sporem.

Pro spor předpokládejme, že existuje vítězná strategie pro druhého hráče. Máme kameny dvou typů, kde každý z typů patří jednomu hráči. První hráč může tuto strategii také použít tím, že svůj první tah zahraje na libovolné místo a dále pokračuje podle vítězné strategie pro druhého hráče. Pokud bude muset v rámci této strategie v určitém tahu udělat tah na místo, kde už udělal první tah, provede tah na jiné libovolné místo. Pak by i první hráč měl vítěznou strategii a vznikne spor, protože oba hráči nemůžou mít vítěznou strategii. Jedinou podmínkou, která musí být splněna, je, že tah navíc nemůže být nevýhodou. Jak si později ukážeme, například u hry Chomp může být tah navíc nevýhodou, takže u hry Chomp nemůžeme použít tuto argumentaci.

Argument o kradení strategií budu ve své práci často používat, protože jej lze použít ve většině silně pozičních kombinatorických her.

2.4 Základní dělení her

Na hry můžeme pohlížet z mnoha pohledů a podle toho taky máme hodně možností, jak hry popisovat. Neexistuje nějaká pevně stanovená struktura, podle které by se hry rozdělovaly, ale můžeme vyzdvihnout základní nejpodstatnější faktory a podle nich vytvořit následující dělení her.

Podle počtu hráčů

Většinou rozlišujeme, zda se hry účastní dva hráči, více než dva hráči a v některých hrách má smysl uvažovat i nekonečný počet hráčů. Hry pro tři a více hráčů jsou často hodně složité na analýzu a je obtížné řešit vlastnosti strategií. Dokonce ani nemusí existovat vyhrávající nebo neprohrávající strategie díky tomu, že může docházet ke spojování strategií dvou nebo více hráčů. Proto se nejčastěji se budeme zabývat pouze hrami, které můžeme určitým způsobem analyzovat, a to jsou hlavně hry, kterých se účastní dva hráči.

Podle výše výhry

Výší výhry rozumíme zisk nebo ztrátu hráče na konci hry, která může být symbolizována reálným číslem, a vždy jsou předem známy podmínky zisku a ztrát před začátkem hry. Rozlišujeme hry s nulovým a nenulovým součtem. Pro hry s nulovým součtem platí, že součet zisků všech hráčů je roven nule. To znamená, že předem určená hodnota, o kterou se ve hře hraje, se nemůže nikam ztratit, a to co jeden z hráčů vyhraje, musí zbývající hráči dohromady prohrát. U her s nenulovým součtem můžou být zisky hráčů libovolné a tyto hry jsou složitější na analýzu. V hrách s nenulovým součtem může docházet k tomu, že například všichni hráči budou ztrácet, nebo dokonce se může stát, že pokud každý z hráčů zvolí optimální strategie, výsledek hry pro každého z nich může být horší, než kdyby zvolil jinou strategii.

Podle role náhody

Součástí hry může být náhodný prvek, který se v teorii her označuje jako další hráč, který nemá ve hře žádný cíl a jeho akce se řídí pravděpodobnostním rozdělením. Také samotní hráči mohou ve stejném stavu hry zvolit pokaždé jiné zahrání a tím do hry vnesou náhodný prvek. Dokonce i součástí optimální strategie může být v určitém stavu používat smíšenou strategii. Nejjednodušším příkladem takové hry jsou kámen-nůžky-papír, kdy jedinou neprohrávající strategií pro každého hráče je náhodně mixovat svůj tah.

Podle informace o stavu hry

Zde hry dělíme na hry s úplnou a neúplnou informací. U her s úplnou informací všichni hráči v každý okamžik hry mají informace o stavu hry, znají všechny možnosti, které oni i další hráči mohou provést, znají pravděpodobnostní rozdělení náhodných tahů a znají všechny možnosti výher, které mohou nastat. U her s neúplnou informací všechny tyto věci nemusíme znát a může se nám stát, že například nevíme, jakou akci může provést soupeř.

Na sekvenční a současné hry

U současných her nastává akce hráčů současně a ve chvíli, kdy jeden z hráčů provádí svou akci, neví, jakou akci provádí soupeř. Například u hry kámen-nůžky-papír. U sekvenčních her se hráči ve svých tazích střídají a další tah následuje až po dokončení tahu předchozího hráče. Například u šachů.

2.5 Kombinatorické hry

Kombinatorické hry jsou nejjednodušší typ her, díky tomu, že splňují určité vlastnosti, díky kterým můžeme zkoumat jejich řešení a strategie. Jedná se o sekvenční hry dvou hráčů, ve kterých se neobjevuje prvek náhody a jedná se o hry s dokonalou informací. Dalším zjednodušením je absence výše výher, rozlišujeme pouze, zda jeden z hráčů vyhrál a druhý prohrál, případně může nastat remíza. Obvykle v těchto hrách máme určitý hrací plán, na kterém hráči provádějí své tahy a snaží se dosáhnout určité herní pozice.
V souvislosti s kombinatorickými hrami můžeme uvažovat další rozdělení her, které vychází z cílů hry jednotlivých hráčů a pozicí do kterých se jednotliví hráči snaží dostat. Většina známých her jsou silné poziční, a proto se budeme věnovat hlavně těmto hrám. Typy her maker-breaker a avoider-enforcer můžeme chápat jako další možné varianty s upravenými pravidly, kde se jiným způsobem určuje vítěz hry a díky tomu se změní i strategie. Například tic-tac-toe, které si později uvedeme je silná poziční hra, ale s upravenými pravidly, může existovat i maker-breaker varianta této hry.

Silné Poziční hry

V silných pozičních hrách vyhrává ten hráč, kterému se jako prvnímu povede umístit prvky do vítězné pozice. Pokud ve hře už není dále možný žádný tah a žádný z hráčů neumístil prvky do vítězné pozice, nastává remíza. Typickým příkladem silné poziční hry jsou piškvorky, nebo šachy.

Maker-Breaker

Koncept těchto her je podobný jako u silných pozičních her. Hlavní rozdíl je v tom, že jeden z hráčů zvaný maker se snaží dosáhnout vítězné pozice a druhý hráč zvaný breaker se mu v tom jen snaží zabránit, ale sám se nesnaží vyhrát. Jinak řečeno, breaker vyhraje, pokud zabrání makerovi vyhrát. Pokud hra skončí a prvnímu hráči se nepovede dosáhnout vítězství, znamená to, že prohrál. V silných pozičních hrách by v tomto případě nastala remíza.

Avoider-Enforcer

Pravidla hry jsou stále stejná, ale rozdíl je v určení vítěze hry. Hry se účastní dva hráči, kde jeden z nich se nazývá avoider a druhý je enforcer. Úkolem enforcera je donutit druhého hráče dostat se do určitého herního stavu. Pokud se mu to povede, vyhraje a pokud se naopak avoider do tohoto stavu nedostane, enforcer prohrává. Remíza nemůže nastat.

3 Rozbor vybraných her

V dalších částech práce se budeme zabývat rozborem vybraných kombinatorických her pomocí teorie grafů a teorie her. Bude se jednat převážně o silné poziční hry. U každé hry si vždy uvedeme pravidla, zařazení hry odpovídající rozdělení her uvedeného na začátku práce a dále se budeme věnovat vlastnostem hry a strategiím.

U jednodušších her si ukážeme i některé důkazy a detailněji si popíšeme herní strategie. Mnoho vlastností her však bylo objeveno až na základě rozsáhlých počítačových analýz a popis těchto vlastností je hodně komplikovaný. V takových případech si uvedeme pouze informace o výsledcích těchto analýz a zdroj, ale nebudeme každý výsledek detailně dokazovat.

Seznam vybraných her:
1) Šprouti
2) Hex
3) Sim
4) Hexapawn
5) Andělův Problém
6) Chomp
7) Conway Soldiers
8) Piškvorky
9) Bridge-It
10) Cops and Robbers

4 Šprouti

4.1 Charakteristika hry

Při popisu pravidel hry a základní charakteristiky jsem vycházel z [4].

Pravidla

Hru hrají dva hráči a hracím plánem je papír nebo deska, na které jsou umístěno několik vrcholů grafu. Každý hráč během svého tahu musí spojit dva vrcholy, případně jeden vrchol sám se sebou hranou, která může být úsečka nebo křivka a mezi nimi vytvoří nový vrchol, který se nesmí přímo dotýkat jiného vrcholu a čáry se nesmí křížit. Z každého vrcholu můžou vést maximálně 3 hrany. V klasické variantě vyhrává ten hráč, který udělá poslední tah, tedy pokud jeden z hráčů už nemá, jak táhnout prohrál. Ve variantě misère je to opačně a prohraje ten hráč, který udělá poslední tah.

Zařazení hry

Jedná se o silně poziční hru dvou hráčů s úplnou informací a bez vlivu náhody, kde graf je přímo hracím plánem. Uvedeme si 3 základní varianty hry. Klasickou variantu, variantu misère a hru s názvem podvodní šprouti. Klasická varianta a varianta misère mají stejná pravidla a jediný rozdíl je v určení vítěze hry. Podvodní šprouti mají trochu odlišná pravidla a jak si později ukážeme, výsledek hry je předem daný.

Vysvětlení pojmů

Život – Možnost vést z vrcholu hranu
Přeživší – Vrchol, který má jeden život, ale vrchol už dále nelze propojit s jiným vrcholem.
Mrtvé Vrcholy – Vrcholy, které nemají žádný život
Sousedi přeživších - Mrtvé vrcholy, které mají za souseda přeživšího.
Farizej – Mrtvé vrcholy, které nemají za souseda přeživšího.

Důkaz, že hra musí někdy skončit

Na první pohled to nemusí být vidět, protože v každém tahu přibude jeden vrchol. Jde o to, že z každého vrcholu můžou vést maximálně tři hrany a v každém tahu vytvoříme jeden vrchol, ze kterého pak povedou dvě hrany. Oba konce těchto hran už jsou ale s některým z vrcholů spojeny, takže přestože jsme zvýšili maximální počet hran vedoucích z vrcholů o tři, využili jsme celkem čtyři možnosti u vrcholů, a proto je jasné, že možnosti, jak vést hranu, někdy musíme vyčerpat.

Horní odhad počtu tahů

Při n počátečních vrcholech máme pro každý vrchol 3 životy. Celkem tedy máme 3n životů a každým tahem jeden život ubereme. Hra tedy může skončit maximálně za $3n$ tahů. Je však třeba si ještě uvědomit, že při posledním tahu vždy vznikne nový vrchol, který bude mít jeden život. Takže počet život na konci hry nebude 0, ale 1. Proto nám bude stačit maximálně $3n - 1$ tahů.

Dolní odhad počtu tahů

Na konci hry musí mít každý přeživší vrchol dva mrtvé sousedy, jinak by nebyl konec hry. Předpokládejme, že existuje f farizejů, n počátečních vrcholů a m tahů, po kterých hra skončila, kde n, m jsou přirozená čísla a f nezáporná celá čísla.

Celkový počet vrcholů ... $n + m$
Celkový počet farizejů ... p
Celkový počet přeživších ... $3n - m$
Celkový počet sousedů přeživších ... $2 \cdot (3n - m)$

$n + m = p + 3n - m + 2 \cdot (3n - m)$

Každý z vrcholů má určité označení. Buď se jedná o farizeje, přeživšího, nebo souseda přeživšího. Žádné další vrcholy neexistují. Rovnice nám vyjadřuje, že celkový počet všech vrcholů musí být roven součtu všech farizejů, přeživších a sousedů přeživších.

Po úpravě rovnice dostáváme vztah $m = 2n - p4$

Hra tedy musí mít alespoň $2n$ tahů a počet farizejů musí být dělitelný čtyřmi. Pokud nevytvoříme žádného farizeje, hra bude mít vždy $2n$ tahů, což můžeme označit jako dolní mez.

4.2 Klasická varianta

Výsledek první počítačové analýzy byl zveřejněn v roce 1991 pro hru až s jedenácti počátečními vrcholy [5]. Označme V jako počet počátečních vrcholů. Hypotéza vzniklá na základě počítačové analýzy říká, že začínající hráč má vítěznou strategii právě tehdy, když V modulo 6 = 1,2 nebo 3. Později byly objevovány strategie i pro hry s větším počátečním počtem vrcholů.V roce 2011 byl představen algoritmus pro analýzu hry až pro 1 - 44 počátečních vrcholů a dále pro 46, 47 a 53 počátečních vrcholů. Přehled všech dokázaných strategií zahrnujících i Misère variantu hry můžeme nalézt na stránce [6] a dosud známé výsledky se shodují s původní hypotézou. Důkaz, který by hypotézu potvrdil, nebo vyvrátil, však zatím neexistuje.

L – Druhý hráč má vítěznou strategii W – Začínající hráč má vítěznou strategii

Počet počátečních vrcholů	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	...
Výsledek hry	L	L	W	W	W	L	L	L	W	W	W	

Obrázek 1: Tabulka výsledků hry z pohledu začínajícího hráče podle hypotézy

Počet počátečních vrcholů	1	2	3	4	5	6	7	8	...	46	47	48	...	52	53	54	...
Výsledek hry	L	L	W	W	W	L	L	L		W	W	?	?	?	W	?	?

Obrázek 2: Tabulka dokázaných výsledků hry z pohledu začínajícího hráče

Během hry se první hráč se snaží o to, aby celkový počet tahů byl lichý, a druhý hráč dosáhne vítězství, pokud celkový počet tahů bude sudý. Oba dva musí dávat pozor na počet přeživších a farizejů a podle toho přizpůsobovat hru, tak aby udělali poslední tah ve hře.

4.3 Varianta Misère

Poslední analýza byla provedena až pro 20 počátečních vrcholů a vznikla hypotéza, která říká, že první hráč vyhraje právě tehdy, když V modulo 6 = 0,4 nebo 5 až na situace, kdy máme jeden nebo čtyři počáteční vrcholy. Při jednom počátečním vrcholu však má vítěznou strategii začínající hráč a při čtyřech počátečních vrcholech má vítěznou strategií druhý hráč, což neodpovídá původní hypotéze. Tyto dvě výjimky jsou vyznačeny tučně.

Počet počátečních vrcholů	**1**	2	3	**4**	5	6	7	8	9	10	11	12	...
Výsledek hry	**W**	L	L	**L**	W	W	L	L	L	W	W	W	

Obrázek 3: Tabulka výsledků hry z pohledu začínajícího hráče podle hypotézy

Počet počátečních vrcholů	**1**	2	3	**4**	5	6	7	8	9	10	11	12	...	19	20	21	...
Výsledek hry	**W**	L	L	**L**	W	W	L	L	L	W	W	W		L	L	?	?

Obrázek 4: Tabulka dokázaných výsledků hry z pohledu začínajícího hráče

4.4 Podvodní šprouti

Rozdíl oproti klasickým šproutům je v tom, že tady jako vrcholy používáme křížky. Každý křížek má čtyři volné konce a během tahu musíme dva volné konce spojit hranou (opět se hrany nesmí křížit) a na ní pak vytvořit nové dva volné konce. V každém tahu tedy odstraníme dva volné konce a zároveň vytvoříme dva nové. Počet volných konců neubíráme a konec hry nastane jen díky tomu, že nemůžeme křížit hrany.

Počet tahů

Označme m jako počet tahů, n jako počet počátečních vrcholů, v celkový počet vrcholů na konci hry, e počet hran na konci hry a f počet ploch rovinného grafu na konci hry. Při určení počtu tahů vycházíme z následujících rovnic.

$e = 2m$ – během každého tahu vzniknou dvě hrany.
$v = n + m$ – při každém tahu vznikne 1 vrchol a n je počet počátečních vrcholů
$f = 4n$

Eulerova charakteristika pro rovinné grafy je 2.
$2 = f - e + v = 4n - 2m + n + m$

Po vyjádření m dostáváme vztah $\mathbf{m = 5n - 2}$

Strategie

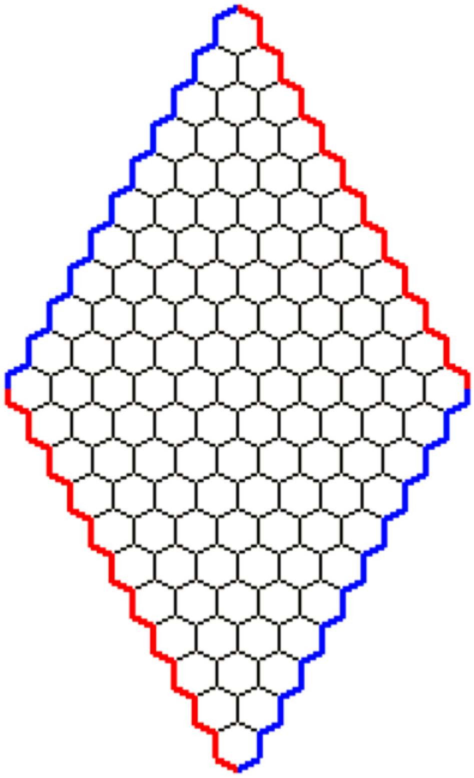
Po vyjádření m můžeme vidět, že výsledek hry vůbec nezávisí na tom, jak hráči hrají a má předem určený výsledek podle počtu počátečních vrcholů. Pokud hra bude začínat s lichým počtem vrcholů, vyhraje první hráč a pokud počet počátečních vrcholů bude sudý, vyhraje naopak druhý hráč.

5 Hex

5.1 Charakteristika hry

Pravidla

[1] Hrací plán je tvořen hexagonální mřížkou o rozměrech nxn. Nejčastěji se používá mřížka 11x11, 13x13, nebo 19x19. Každému hráči patří dvě protilehlé strany hracího plánu. Dva hráči střídavě umísťují kameny své barvy na pole hracího plánu. Vyhraje ten hráč, který jako první sestaví z kamenů své barvy cestu, která spojí protilehlé strany plánu své barvy. Rohová pole plánu patří oběma barvám. Druhý hráč má navíc možnost po prvním tahu prvního hráče vyměnit si kameny a stát se tak prvním hráčem. Nemusí však tuto možnost využít. Smysl této možnosti si vysvětlíme později.



Obrázek 5: Hrací plán hry hex

Zařazení hry

Znovu se jedná o silnou poziční hru s úplnou informací a bez vlivu náhody. Hra je v dnešní době celkově dost rozšířená a dá se hrát i online proti lidem nebo i proti počítači na stránce https://cs.boardgamearena.com/!gamepanel?game=hex. Je však nutné stáhnout a nainstalovat aplikaci.

Lepším odkazem je http://www.lutanho.net/play/hex.html, kde si můžeme nastavit úroveň počítače a hra nám nabízí další možnosti. Můžeme druhému hráči zakázat vyměnit pozice po prvním tahu a lze také sledovat hru dvou počítačů, což může být užitečné pro analýzu a zlepšování naší vlastní hry. Nemůžeme však měnit velikost hracího plánu a hra vždy probíhá na hracím plánu o rozměrech 11x11.

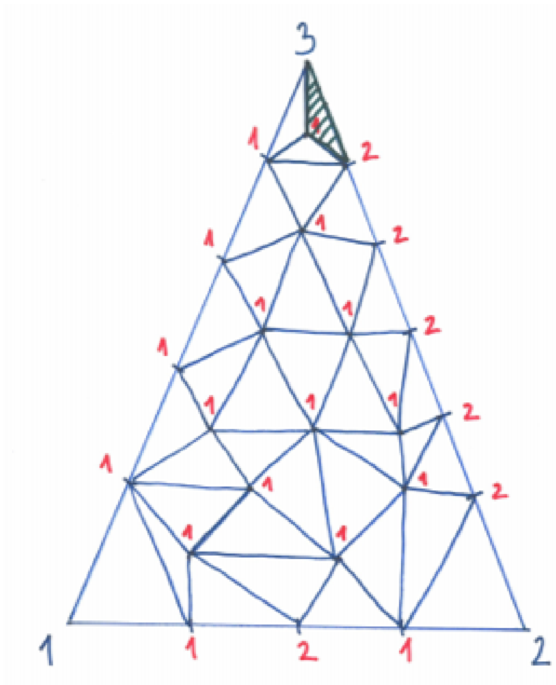
Zajímavým pozorováním je, že pokud zakážeme druhému hráči vyměnit pozice a necháme oba počítače opakovaně hrát proti sobě, občas se stane, že vyhraje druhý hráč. Znamená to, že algoritmus, podle kterého hraje počítač není dokonalý a teoreticky je možné nad počítačem zvítězit v pozici prvního i druhého hráče.
Pokud ponecháme druhému hráči možnost vyměnit pozice, u hry počítačů na nejvyšší úrovni, kterou stránka nabízí, dochází k různým výsledkům hry. Někdy vyhraje první hráč, někdy naopak druhý a taky druhý hráč využívá možnosti prohození pozic jen v některých případech, což se i dá očekávat, protože za podmínky, že druhý hráč může po prvním tahu vyměnit pozice, není zatím známá vítězná strategie.

5.2 Spernerovo Lemma

John Nash ukázal, že hra nemůže nikdy skončit remízou pro libovolnou velikost hracího plánu. Důkaz se provádí pomocí Spernerova lemmatu. Při popisu Spernerova lemmatu jsem vycházel z výukového materiálu Vysoké školy báňské [7]
Nechť v rovině existuje trojúhelník s vrcholy označenými 1,2 a 3. Uvnitř trojúhelníku vytvoříme konečný počet dalších trojúhelníků, tak aby žádný z vrcholů neležel uvnitř hrany jiného trojúhelníku. Může však ležet uvnitř hrany původního trojúhelníku o třech vrcholech. Dojde k rozdělení části roviny na oblasti, které nazveme triangulací.

Nyní očíslujeme čísly 1,2 a 3 všechny vrcholy triangulace s následujícími podmínkami:
Na straně původního trojúhelníku mezi vrcholy 1 a 2 nesmíme použít trojku.
Na straně původního trojúhelníku mezi vrcholy 1 a 3 nesmíme použít dvojku.
Na straně původního trojúhelníku mezi vrcholy 2 a 3 nesmíme použít jedničku.

Triangulace může vypadat jako na obrázku 6.



Obrázek 6: Ukázka jedné z možných triangulací

Každá triangulace očíslovaná výše uvedeným způsobem musí obsahovat trojúhelníček, jehož vrcholy mají čísla 1, 2, 3. Ke každé takové triangulaci můžeme definovat graf G. Vrcholy tohoto grafu jsou oblasti triangulace (včetně vnějšího vrcholu, který označíme v). Vrcholy jsou spojeny hranou právě tehdy, když jim odpovídající oblasti mají na hranici stranu 12. Z výše uvedeného plyne, že ke každé triangulaci existuje graf G. Vrcholy odpovídající trojúhelníčkům, kterých chybí 1 nebo 2, mají stupeň nula. Trojúhelníčky, které obsahují 1 i 2 jsou 112, 122 (tyto trojúhelníčky mají stupeň 2) a 123 (stupeň 1). Vrchol v má lichý stupeň. Představme si nyní, že máme správně očíslovanou triangulaci a neobsahuje trojúhelníček 123. Pak je součet všech stupňů vrcholů v grafu G liché číslo. To však není možné, protože součet všech stupňů vrcholů se rovná dvojnásobku počtu hran. Proto každá triangulace musí obsahovat trojúhelníček 123.

5.3 Důkaz o nemožnosti remízy

Důkaz se dá provést právě na základě Spernerova lemmatu, ale existuje i jiný pohled na hru, který vysvětlil Thomas Maarup ve své práci [8] a také dokázal, že hex nemůže skončit remízou.

Nechť G je rovinný 2-souvislý graf. Hrany grafu odpovídají hranám oddělující buňky na hracím plánu hry hex. Vrcholy grafu jsou spojnice těchto hran a tím pádem každá oblast uvnitř grafu G odpovídá jednomu z políček hracího plánu. Z toho vyplývá, že každý vrchol může být stupně dva nebo tři. Vrcholy po stranách a v rozích hracího plánu budou mít stupeň 2. Ostatní vrcholy mají stupeň 3. Také platí, že kolem každého vrcholu jsou právě tři oblasti.

Můžeme předpokládat, že všechna políčka jsou obsazená, protože hra Hex nemůže skončit remízou dříve, než jeden z hráčů vyhraje nebo dříve, než jsou obsazena všechny políčka. Nyní můžeme vytvořit podgraf G' ke grafu G. Podgraf G' se bude skládat jen z hran, které oddělují buňky dvou různých barev. Všechny vrcholy podgrafu G' kromě vrcholů v rozích budou mít stupeň 0 nebo 2. Pokud bude vrchol mít stupeň nula, znamená to, že všechna políčka kolem vrcholu jsou stejné barvy. Pokud vrchol bude mít stupeň dva, znamená to, že kolem vrcholu jsou jednou z barev obarvená dvě políčka a druhou z barev zbývající třetí políčko. Žádná jiná možnost nemůže nastat. Výjimku tvoří čtyři vrcholy v rozích grafu, ty mají stupeň 1.

Dále platí, že každý graf s vrcholy stupně maximálně dva se skládá z izolovaných vrcholů, jednoduchých cyklů a jednoduchých cest. Protože podgraf G' má přesně čtyři vrcholy stupně 1, musí v podgrafu G' být právě dvě takové cesty. Označme levý horní roh a, pravý horní roh b, levý dolní roh c a pravý dolní roh d. Každá ze dvou cest, která v grafu je, musí spojit dva z vrcholů a, b, c, d a obě cesty musí spojit jiné vrcholy. Navíc není možné jednou cestou spojit dva vrcholy v protilehlých rozích, protože pak by druhá z cest nemohla existovat. To znamená, že obě cesty spojují buď dvojice vrcholů a-b a c-d, nebo a-c a b-d. V prvním případě vyhraje hráč, kterému patří horní a dolní strana hracího plánu a ve druhém případě vyhraje druhý z hráčů a neexistuje možnost, při které by nastala remíza.

5.4 Strategie

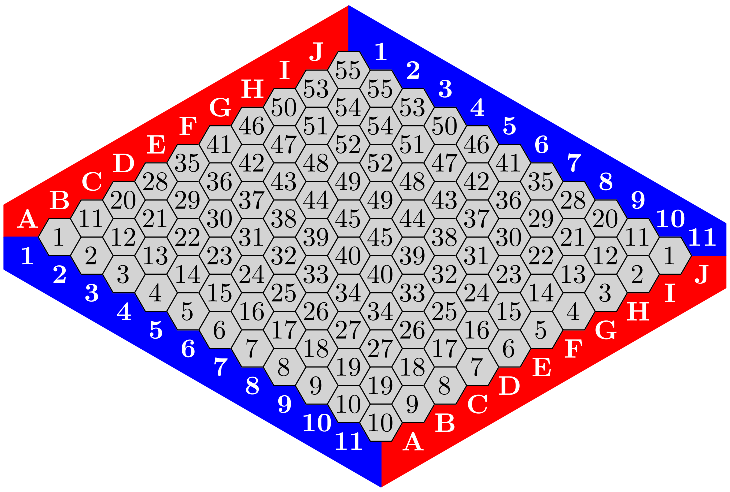
Nejdříve budeme předpokládat, že druhý hráč nemá možnost po prvním tahu prvního hráče prohodit pozice. Kvůli argumentu o kradení strategií nemůže existovat vítězná strategie pro druhého hráče. Pokud by existovala vítězná strategie pro druhého hráče, mohl by ji použít i první hráč [8].

Předpokládejme, že existuje výherní strategie pro druhého hráče. První hráč ve svém prvním tahu obsadí libovolné pole a v následujícím průběhu hry předstírá, že je druhý hráč, uplatňující svou vítěznou strategii. Pokud pole, které první hráč na začátku obsadil bude v průběhu hry součástí této vítězné strategie, jednoduše zahraje místo ní tah na libovolné jiné místo na hracím plánu. Nezbytnou vlastností pro platnost tohoto důkazu je, že tah nemůže být nevýhodou. V Hexu vždy platí, že každé obsazené pole je buď výhoda nebo nehraje žádnou roli.

Víme, že za těchto podmínek má první hráč vítěznou strategii, ale to ještě neznamená, že ji budeme umět najít. Důkaz je nekonstruktivní.

Pokud se chceme zbavit výhody prvního hráče, nabízí se určitým způsobem upravit hrací plán ve prospěch druhého hráče. Například můžeme zkusit změnit tvar hracího plánu. Když však změníme tvar hracího plánu ve prospěch druhého hráče, bude to pro něj zase moc velká výhoda a pak by snadno zvítězil právě druhý hráč.

Na obrázku 7 jsou symetricky očíslovány políčka hracího plánu o velikosti 11x10. Každé číslo je na obrázku dvakrát a vítěznou strategií druhého hráče je vždy kopírovat tahy prvního hráče a hrát na políčko se stejným číslem. Pokud druhý hráč bude takto postupovat, vždy spojí obě své strany dříve než první hráč.



Obrázek 7: Vítězná strategie druhého hráče na upraveném hracím plánu

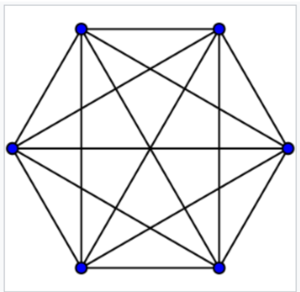
Místo úpravy hracího plánu se výhoda prvního hráče kompenzuje tím, že je druhému hráči umožněno po prvním tahu prvního hráče vyměnit si role a může se tak sám stát prvním hráčem. Přesto i při tomto rozšíření pravidel bylo dokázáno, že první hráč má vítěznou strategii pro hrací plány až do rozměrů 9x9 a pro Hex 10x10 byla nalezena vítězná strategie prvního hráče jen pro pravidla bez možnosti prohození tahu [9]. Pro vyšší rozměry hracích plánu nejsou zatím známy vítězné strategie.

6 Sim

6.1 Charakteristika hry

Pravidla

Dva hráči vybarvují hrany úplného grafu o šesti vrcholech dvěma barvami a snaží se, aby nevznikl trojúhelník z jejich barvy. Hráč, který vytvoří trojúhelník, prohrává. Tato hra není až tolik rozšířená, dá se však také stáhnout pod odkazem https://share.catrob.at/pocketcode/program/1478 a hrát proti počítači.



Obrázek 8: Hrací plán hry Sim

Zařazení hry

Silná poziční sekvenční hra dvou hráčů s úplnou informací a bez vlivu náhody. Sim je také příkladem hry, které se označují jako Ramseyovy hry. Hracím plánem je úplný graf o šesti vrcholech.

Strategie

Zde nemůžeme použít argument o kradení strategií, protože v této hře se může stát, že tah je nevýhodou. Pokud se hráč rozhodne obarvit náhodnou hranu, může se mu později v průběhu hry stát, že díky této hraně vytvoří trojúhelník a prohraje. Pokud by cílem hry bylo vytvořit trojúhelník, mohli bychom argument o kradení strategie použít, ale tady se snažíme vyhnout vytvoření trojúhelníku, takže nám hrana navíc může překážet v naší strategii.

Hra je však vyřešena a bylo zjištěno, že existuje vítězná strategie pro druhého hráče. Strategie je popsána v práci společnosti Mathematical Association of America [12].

6.2 Ramseyova věta a důkaz nemožnosti remízy

Ramseovy věty jsou součástí známé teorie Ramseovy teorie využívané v kombinatorice. Podrobnější informace týkající se Ramseovy teorie jsou dostupné například na internetu. [10], kde můžeme najít také obecnější dostupné shrnutí Ramseyových vět. [11]. Pomocí grafové Ramseyho věty se dá ukázat, že hra Sim nikdy nemůže skončit remízou. Pro důkaz je dostačující ukázat si jeden konkrétní příklad, který odpovídá situaci ve hře Sim a ze závěru tohoto důkazu přímo plyne, že Sim nemůže nikdy skončit remízou. Při vysvětlení, proč Sim nemůže skončit remízou jsem čerpal z obou zdrojů uvedených v této kapitole.

Mějme skupinu šesti lidí. V této skupině vždy můžeme najít trojici lidí, kteří se znají navzájem, nebo naopak trojici lidí, kteří se vůbec neznají. Budeme tedy hledat jednu z těchto trojicí. Vyberme si jednoho člověka z této skupiny a označme ho jako člověk A. Ostatních 5 lidí můžeme rozdělit do dvou množin, které označíme například B a C. V množině B budou všichni lidé, kteří se znají s A, v množině C pak budou všichni lidé, kteří se s člověkem A neznají. Evidentně jedna z těchto množin vždy musí obsahovat alespoň 3 lidi. Rozdělme si úlohu na 2 případy, podle toho, která z množin obsahuje alespoň 3 lidi.

Nejprve se budeme zabývat množinou B, tedy lidmi, kteří se znají s člověkem A. Pokud se alespoň 2 lidé z množiny B znají s člověkem A, pak tvoří společně s ním trojici lidí, kteří se znají navzájem. Pokud se žádní dva z nich neznají navzájem, pak společně tvoří trojici lidí, kteří se neznají. Podobně to bude platit pro množinu C, pokud bude obsahovat alespoň 3 lidi. Máme trojici lidí, které člověk A nezná. Pokud se dva z těchto lidí neznají, pak tvoří spolu s člověkem A hledanou trojici. Pokud však v množině C nejsou 2 lidé, kteří by se navzájem neznali, znamená to, že se všichni 3 znají a zase tvoří hledanou trojici. Více možností není a vždy tedy můžeme najít jednu z trojic.

Výše uvedený problém můžeme přeformulovat do teorie grafů. Mějme graf G o šesti vrcholech a 2 barvy, kde každá z nich odpovídá jednomu hráči. Vrcholy grafu symbolizují šest lidí z naší původní skupiny. Hrany grafu symbolizují, zda se lidé znají nebo ne. Pokud se lidé znají, hrany mezi nimi jsou vybarvené barvou prvního hráče, pokud se neznají, jsou hrany mezi vrcholy vybarveny barvou druhého hráče. V každém grafu G pak musí existovat trojice vrcholů tvořící trojúhelník, nebo naopak nezávislá trojice vrcholů. Z toho plyne, že v grafu vždy musí vzniknout jednobarevný trojúhelník a podle jeho barvy vyhraje buď první, nebo druhý hráč. Remíza nikdy nenastane. Zobecněním výše uvedeného příkladu dostaneme Ramseyovu větu pro grafy.

Pro každé $k, l \in N$ existuje $R(k, l)$ takové, že každý graf na $R(k, l)$ nebo více vrcholech obsahuje k-prvkovou množinu indukující kliku (podgraf nějakého grafu, který je úplným grafem) nebo l-prvkovou množinu indukující nezávislou množinu.

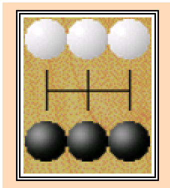
7 Hexapawn

7.1 Charakteristika hry

Při popisu pravidel a strategie jsem čerpal ze stránky, kterou vytvořil Robert Price [13].

Pravidla

Hru hrají dva hráči na hracím plánu, kterým je deska o rozměrech NxM. N i M jsou přirozená čísla. Oba hráči mají hrací kameny, se kterými pohybují po hracím plánu. Na začátku jsou kameny umístěny v protilehlých krajních řadách.



Obrázek 9: Výchozí situace

Oba hráči se střídají v tazích. Tah vždy probíhá tak, že hráč vždycky provede tah svým kamenem podle určitých pravidel. Pravidla jsou podobná jako v šachách, kameny se mohou pohnout o jedno políčko v před, pokud na něm nestojí soupeřům kámen, nebo o jedno políčko diagonálně, ale naopak jen za podmínky, že na tomto políčku je umístěn soupeřův kámen. V tomto případě dojde k zajetí soupeřova kamene a ten je odstraněn ze hry. Cílem hry je dostat svůj kámen na protější stranu hracího plánu. Hra však může skončit i za dvou podmínek.
1) Některý z hráčů přišel o všechny své kameny
2) Některý z hráčů je na tahu a nemá jak táhnout.

Pokud některý z hráčů nemá žádné kameny nebo nemá jak táhnout, tak prohrál. Jinak se hraje do té doby, než někdo dostane svůj kámen na protější stranu.

Hra má dvě další varianty nazvané Berolina pawns a Berolina plus pawns. Ve variantě Berolina je hlavní rozdíl v pohybu kamenů, kameny se mohou pohybovat na volná políčka diagonálně, a naopak směrem dopředu mohou pouze zajímat kameny. V berolina plus kameny ještě navíc mohou zajímat soupeřovy kameny pohybem do strany.

Zařazení hry

Silná poziční sekvenční hra dvou hráčů s úplnou informací a bez vlivu náhody. Na hru Berolina pawns pak dále navazuje jedna z variant šachů, známá jako Berlínské šachy.

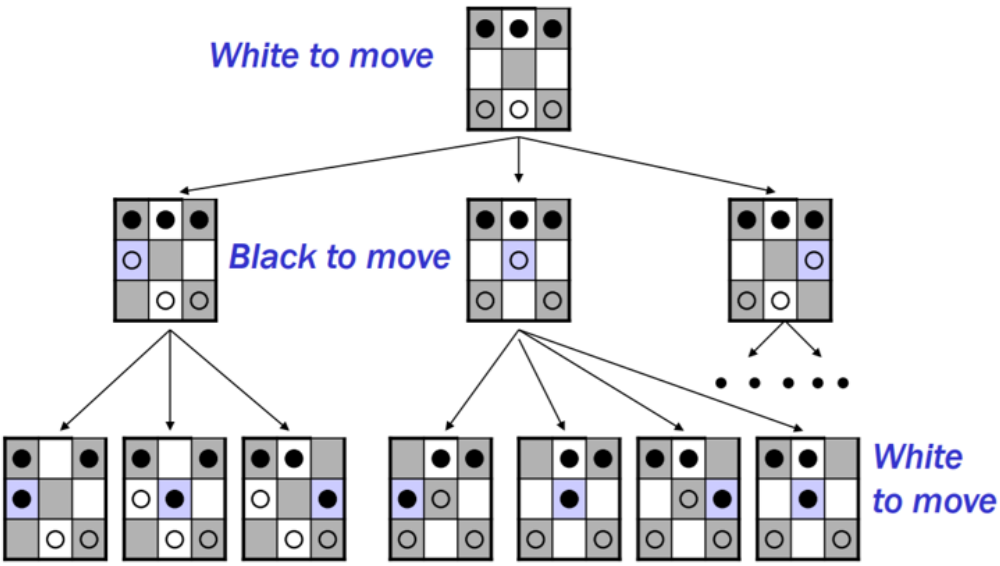
7.2 Strategie

Nejjednodušším hracím plánem, na kterém má smysl hru hrát je deska o rozměrech 3x3, kde je snadné ukázat, že vítěznou strategii má druhý hráč. [13]. Jsou jen dvě možnosti, jak může první hráč začít a to krajním, nebo prostředním kamenem.

Pokud první hráč začne tahem krajním kamenem, druhý hráč jej zajme. První hráč pak zase musí zajmout soupeřův kámen svým prostředním kamenem, aby zabránil soupeři dosáhnout vítězství. Druhý hráč pak už má jen jednu možnost, jak táhnout a hra skončí, protože bílý bude na tahu a nemá jak táhnout.

Pokud první hráč začne prostředním kamenem, druhý hráč jej opět zajme některým ze svých krajních kamenů. První hráč musí zase reagovat zajetím, jinak by druhý hráč v dalším tahu vyhrál. První hráč se sice může rozhodnout, kterým ze svých dvou kamenů provede zajetí, ale obě možnosti vedou k rychlému vítězství druhého hráče.

Vítězná strategie druhého hráče je lépe pochopitelná na obrázku 10, kde je znázorněn herní strom pro první dva tahy. Už z něj je evidentní a dá se snadno domyslet, že druhý hráč (zde označen jako černý) má vždy vítěznou strategii. Třetí možnost prvního tahu bílého je vlastně zbytečné řešit, protože pozice nakonec bude symetrická jako u prvního tahu.



Obrázek 10: Herní strom pro první dva tahy

Strategie pro hrací plán 3x3 je tedy hodně triviální. Pro hrací plány vyšších rozměrů je však hra komplikovanější a podle velikosti hracího plánu se mění i hráč, který má vítěznou strategii. Na stránce http://www.zillionsofgames.com/ je možnost si hru stáhnout a hrát proti počítači na volitelných velikostech hrací desky (až do 8x8) a také si zvolit typ hry (hexapawn,berolina,berolina plus). Pomocí softwaru zillions byl hexapawn vyřešen pro některé malé velikosti hracích plánu [13]. Software sice nehrál úplně perfektně, pokud zjistil, že je v prohrávající situaci a nesnažil se například oddálit porážku a dělat nejlepší rozhodnutí, ale tato analýza by měla být dostačující pro určení, který z hráčů má vítěznou strategii. Výsledek analýzy je znázorňen na obrázku 11. Hráč s vítěznou strategií je označen jako Winner. První hráč je zde označen jako bílý a druhý hráč jako černý.

Pawn Type	**size**	**Winner**
Normal	3x3	Black
Normal	3x4	Black
Normal	4x4	White
Normal	4x5	Black
Normal	5x5	White
Normal	5x6	White
Berolina	3x3	Black
Berolina	3x4	White
Berolina	4x4	Black
Berolina	4x5	Black
Berolina	5x5	Black
Berolina Plus	3x3	White
Berolina Plus	3x4	White
Berolina Plus	4x4	Black
Berolina Plus	4x5	White
Berolina Plus	5x5	White

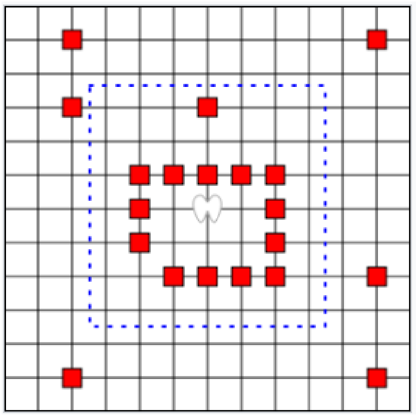
Obrázek 11: Tabulka s přehledem vítězných strategií

8 Andělův Problém

8.1 Charakteristika hry

Pravidla

Čerpáno jsem z [14]. Hru hrají dva hráči na hracím plánu, kterým je nekonečně velká mřížka. Hráče označíme jako anděl a ďábel. Oba hráči se střídají v tazích. Anděl je figurka se silou o velikosti k, kde $k \in N$. Anděl se ve svém tahu pohybuje po hracím plánu a může skočit na libovolné políčko, na které se z jeho pozice může dostat šachový král pomocí k nebo méně tahů. Nemůže však zůstat na místě. Například zde je modře zobrazeno, kam až se anděl může ve svém tahu pohnout. Jeho pohyb je vždy omezen hranou čtverce o hraně velikosti $2k$ a jehož středem je právě políčko, na kterém stojí anděl.



Obrázek 12: Ukázka jedné z herních pozic a rozsahu pohybu anděla

Ďábel není přímo na hracím plánu, ale ve svém tahu vždy může obsadit jedno políčko hracího plánu. Anděl se snaží těmto políčkům neustále vyhýbat, může je však přeskakovat. Na obrázku výše jsou červeně vyznačeny políčka obsazená ďáblem. Ďábel také nesmí obsadit políčko, na kterém zrovna stojí anděl. Ďábel vyhraje, pokud anděl nebude mít ve svém tahu jinou možnost než vstoupit na ďáblem obsazené políčko. Anděl je vítězem hry, pokud se dokáže obsazeným políčkům vyhýbat do nekonečna.

Zařazení hry

Andělův problém je typově odlišnou hrou od všech předchozích her. Pro anděla tady není konkrétní vítězná pozice. Svým způsobem můžeme hru chápat i jako maker-breaker hru, když si představíme, že ďábel se snaží anděla dostat do určité pozice, ale anděl vyhraje, pokud se mu povede zabránit ďáblovi, aby se do této pozice dostal.

8.2 Strategie

Je jasné, že pokud má anděl vítěznou strategií pro sílu k, musí mít vítěznou strategii i pro všechny síly větší než k, protože mu nic nebrání svou větší sílu jednoduše nevyužít a hrát podle strategie, která funguje pro k. Proto nás bude hlavně zajímat, pro jaké nejmenší k má anděl vítěznou strategii. V roce 2005 bylo dokázáno, že pro $k = 1$ má vítěznou strategii ďábel a byl uveden podrobný důkaz, jak musí ďábel postupovat [15]. Později se objevily další tvrzení a důkazy o strategiích anděla a ďábla a také bylo vyřešeno, jak je to s andělem o síle větší než jedna.

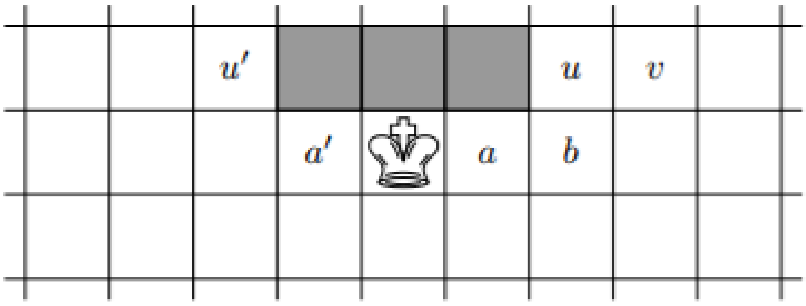
Zajímavým zjištěním je, že nezávisle na síle k, si anděl nemůže nijak pomoct tím, že se bude neustále snažit utíkat jedním směrem. Platnost tohoto tvrzení stejně jako důkaz, že anděl o síle jedna může být vždy poražen je vysvětlen zde [15]. Přesto nakonec bylo dokázáno, že anděl o síle alespoň dva má vítěznou strategii [16]. Jsou tedy známy kompletní informace o strategiích v této hře, včetně popisu vítězné strategie anděla. Byly popsány tři hlavní důkazy, které vysvětlují proč a za jakých podmínek vyhraje anděl, nebo ďábel.

1) Anděl o síle 1 prohraje
2) Anděl nemůže vyhrát vzdalováním se od počátku
3) Anděl o síle větší než 1 vyhraje

8.3 Důkaz, že anděl o síle 1 prohraje

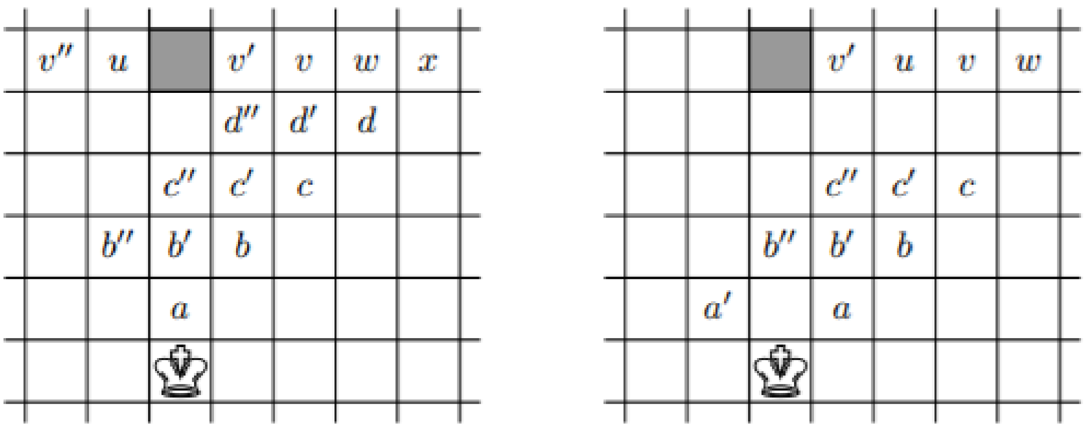
[15] Na začátku důkazu si musíme vysvětlit, o co se vlastně ďábel bude snažit. Jeho konečným cílem bude anděla uzavřít v nějakém prostoru, který mu bude dále zmenšovat. Aby ďábel tohle mohl zajistit musí být schopen zabránit andělovi překročit určitou přímku. Figurka anděla je na obrázcích zobrazena jako šachový král, protože pohyb anděla o síle jedna se shoduje s pohybem krále.

Z obrázku 13 je snadno vidět, jak musí ďábel postupovat. Na tah anděla na políčko a ďábel zareaguje obsazením políčka u apod.



Obrázek 13: Trojitý blok proti překročení přímky

Také platí, že pokud ďábel nechce pustit anděla za určitou přímku, musí začít tvořit blokádu nejpozději ve chvíli, kdy je anděl vzdálen pět políček od této přímky. Podle schématu na obrázku 14 pak dokáže ďábel vždy zabránit andělovi překročit přímku.

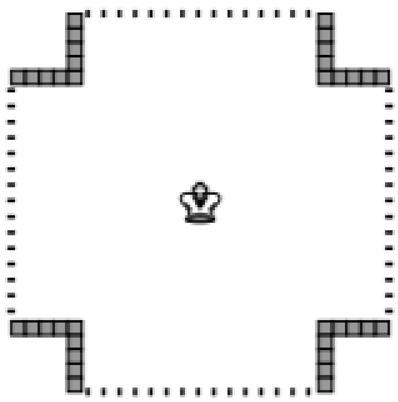


Obrázek 14: Začátek tvorby blokády

Schéma je rozděleno na dvě části podle prvního tahu anděla. Vlevo je znázorněna reakce ďábla na tah anděla rovně. Vpravo pak jsou reakce ďábla na pohyb anděla po diagonále. Vždy k sobě patří dvojice písmen a-u, b-v, c-w, d-x. Podle této dvojice můžeme vždy určit ďáblovu reakci na andělův tah. Schéma zahrnuje všechny možnosti, které mohou nastat, kromě symetrických pozic.

Když už víme, že ďábel je schopen zabránit andělovi překročit určitou přímku, může kolem anděla vytvořit pomyslný čtverec, za který se už anděl nedostane a postupně mu v něm omezovat prostor. Když se anděl přiblíží k některé z hranic čtverce, ďábel může začít tvořit blokádu, tak jak jsme si ji popsali na začátku důkazu. Ďábel musí kontrolovat všechny čtyři rohy, aby nikdy nebyl nucen tvořit blokádu na dvou místech najednou. Podmínkou je, aby rohy čtverce byly dostatečně daleko od andělovy výchozí pozice, aby si ďábel stihl pozici připravit. Jinak by se mohl anděl přiblížit příliš brzo a neustále postupovat podél jedné z hranic.

Svou pozici si je schopen ďábel připravit během prvních 44 tahů, herní plán pak bude vypadat přibližně takto.



Obrázek 15: Uzavření anděla

Když víme, že ďábel je schopen uzavřít anděla o síle jedna, při zkoumání strategie pro anděla o síle dva nás snadno může napadnout zkoušet utíkat stále jedním směrem, abychom nedali ďáblovi šanci tvořit kolem nás podobnou bariéru. Buď anděl může zkoušet neustále zvyšovat například y-souřadnici, nebo se může neustále vzdalovat od počátku. Bylo však dokázáno, že tato strategie anděla nemůže fungovat bez ohledu na to, jakou sílu má anděl [15].

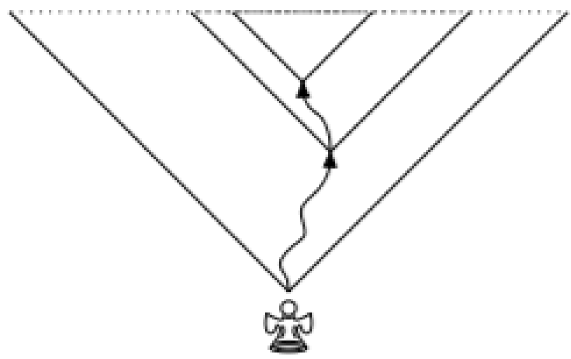
8.4 Důkaz, že anděl nemůže vyhrát neustálým se vzdalováním od počátku

Předpokládejme, že anděl musí neustále zvětšovat svou y-souřadnici. Díky tomu se anděl může pohybovat jen v oblasti tvaru kruhové výseče. Ďáblova strategie pak bude začít tvořit zeď v části této oblasti podle obrázku 16. Anděl však může ďáblova políčka přeskakovat, takže ďáblova zeď musí mít tloušťku k, odpovídající síle anděla, tak aby se anděl za zeď nemohl dostat a taky ďábel musí začít zeď tvořit dostatečně daleko od anděla, aby stihl zeď dokončit, dřív než se k ní anděl přiblíží.

Řekněme, že ďáblova zeď musí být ve vzdálenosti h nad andělovou počáteční pozicí. Anděl se během h tahů nedostane dále než o vzdálenost hk do strany. Ďáblova zeď tedy bude dlouhá maximálně $2hk + 1$, takže zeď tloušťky k v této vzdálenosti se skládá přibližně z $2hk^2$ políček. Ďábel bude svou zeď tvořit po částech. Během prvních $\frac{h}{2k}$ tahů anděl urazí polovinu vzdálenosti od zdi. Ďábel během té doby zablokuje přibližně $4k^3$ políček, které budou rozloženy po celé délce zdi.

Jakmile anděl urazí polovinu vzdálenosti, zmenší se prostor pod zdí, ve kterém se anděl bude pohybovat. Ďábel tak může délku své zdi omezit jen na místa, kam se anděl může dostat ze své nové pozice a tato nová zeď bude mít poloviční délku oproti původní zdi. Než anděl ze své nové pozice znovu urazí polovinu vzdálenosti ke zdi, ďábel zase zablokuje dalších přibližně $4k^3$ políček, jen nebudou rozloženy po celé délce původní zdi, ale jen v omezené části zdi podle směru anděla.

Jde v podstatě o to, že ďábel stále víc a víc zahušťuje prostor, kterým se anděl vydá a když zvolíme h dostatečně vysoké, ďábel může celý proces opakovat pořád dokola a než anděl dorazí ke zdi, ďábel stihne zablokovat všechna potřebná políčka, tak aby zabránil dalšímu pohybu anděla.



Obrázek 16: Přizpůsobování tvorby zdi podle pohybu anděla

8.5 Důkaz, že anděl o síle dva vyhraje

[16] Řešení, které představil Oddvar Kloster dokonce ukazuje, že anděl o síle dva může neustále uhýbat jen na nekonečně velké polorovině. Andělova vítězná strategie je následující. Budeme rozlišovat dva typy políček - zakázaná a obsazená. Zakázaná políčka si vytváří sám anděl, tak aby si přizpůsoboval svůj prostor, ve kterém se bude pohybovat. Obsazená políčka jsou políčka, která obsadil ďábel. Políčko samozřejmě může být zakázané i obsazené zároveň.

1) Anděl prohlásí část hracího plánu za zakázanou a nesmí tam vstoupit. Na začátku hry řekněme, že anděl může hrát jen na nekonečné polorovině.

2) Během celé hry anděl musí stát přímo vedle některého ze zakázaných políček. Proto část hranice políčka, na kterém zrovna stojí anděl je současně součástí hranice zakázané oblasti. Celé hranici podél zakázané oblasti budeme říkat hraniční cesta, protože anděl se může pohybovat jen podél oblasti zakázaných políček. Dokonce si anděl zvolí jen jeden směr podél hraniční cesty, po které půjde a nikdy se nebude vracet na políčko, na kterém už jednou byl.

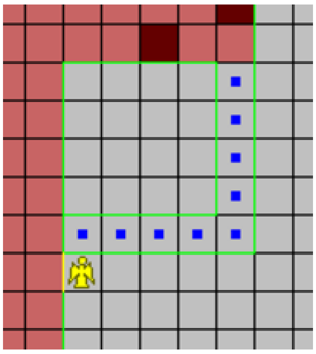
3) Pokaždé, kdy ďábel provede tah, anděl zvažuje, zda změní cestu a prohlásí za zakázané i další políčka. Pokud je možné prohlásit další políčka za zakázané, tak aby byly splněny následující podmínky, musí tuto možnost anděl využít.

a) Mezi žádnými dvěma zakázanými políčky nesmí být mezera.
b) Cesta za andělem musí zůstat nezměněna. Anděl si cestu může přizpůsobovat jen ve směru, kterým se vydal - podél zakázaných políček.
c) Délka hraniční cesty se nesmí zvětšit o více než dvě jednotky za každé nově zakázané políčko. (Za jednotku zde považujeme jednu z hran kolem políčka)

Abychom dokázali, že tato strategie funguje, musíme ukázat, že anděl nikdy nevstoupí na obsazené políčko mimo zakázanou oblast. Vzhledem k tomu, že anděl musí vždy stát vedle zakázané oblasti, musíme každé obsazené políčko sousedící se zakázanou oblastí prohlásit za zakázané. Tím si zajistíme, že anděl nikdy nevstoupí na zakázané políčko mimo zakázanou oblast. Dále musíme ukázat, že anděl nikdy nevstoupí na zakázané políčko uvnitř oblasti. Toto také platí, protože anděl nikdy nevstoupí na žádné z políček ze zakázané oblasti.

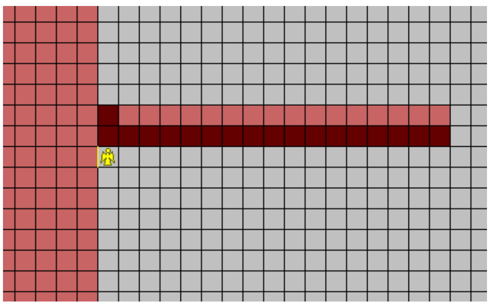
Aby anděl byl donucen vstoupit na zakázané políčko, musel by se ocitnout v oblasti uvnitř zakázaných políček. Můžeme si představit, že ďábel bude tvořit zeď ve směru hodinových ručiček kolem anděla, dokud nenarazí na další část zakázaného prostoru za andělem. To však nemůže být provedeno. Aby bylo možné vytvořit takovou zeď, ďábel musí kvůli andělovy podmínky 3 obsadit určitý počet políček v blízkosti oblasti, ve které chce anděla uzavřít. Vzhledem k omezené rychlosti, s jakou ďábel může obsazovat čtverce, můžeme se vrátit v čase do chvíle, kdy se anděl bude chystat vstoupit dovnitř této oblasti a zjistíme, že už nyní existuje hodně obsazených políček, které anděl prohlásí za zakázané a místo aby vstoupil do pasti, může ji obejít.

Obrázek 17 ukazuje, že snaha ďábla vytvořit zeď kolem žluté figurky anděla se nikdy nepovede. Představme si, že se ďábel bude snažit vytvořit zeď z políček označených modře. Červená políčka jsou zakázaná a tmavě červená políčka jsou obsazená a zakázaná zároveň. Je jasné, že anděl bude mít možnost prohlásit další políčka za zakázaná, upravit si cestu a past obejít dříve, než bude dokončena.



Obrázek 17: Snaha o vytvoření zdi kolem anděla

Další obrázek 18 ještě rozšiřuje zakázanou oblast, ale stejně ďábel nikdy nemůže stihnout anděla uzavřít, protože na to nemá dostatek tahů a anděl vždy stihne pokračováním podél cesty ďáblovi uniknout.



Obrázek 18: Rozšíření zakázaných políček

Princip důkazu si můžeme vyzkoušet v rámci hry a sami uvidíme, že ať uděláme cokoliv, nikdy anděla o síle 2 neuzavřeme. http://home.broadpark.no/∼ oddvark/angel/demo.html.

9 Chomp

9.1 Charakteristika hry

Při popisu hry Chomp jsem čerpal ze stránky *The game of chomp* [31].

Pravidla

Hrací plochu zde představuje dvourozměrné pole, které tradičně reprezentuje tabulku čokolády. Levý horní roh představuje otrávenou část čokolády. Hru hrají dva hráči, kteří se střídají v tazích a hráč, který odebere otrávenou část, prohrál. Tahem hráče se rozumí odebrání libovolného políčka čokolády a všech políček, které jsou od něj napravo nebo dole, nebo napravo a dole.

Zařazení hry

Hra Chomp je zase příkladem silné poziční hry s konečným počtem tahů. Dá se říct, že pokud hráči budou hrát racionálně, prohraje hráč, který bude donucen provést poslední tah. Přestože hra má jednoduchá pravidla, vítězná strategie je známa jen pro hrací plány specifického tvaru, což dělá hru zajímavou.

9.2 Strategie

Vítěznou strategií zde musí mít první hráč. Dá se to snadno dokázat pomocí argumentu o kradení strategií. Argumentace probíhá trochu jiným způsobem, než jak jsme si ji uváděli na začátku práce. Předpokládali jsme podmínku, že žádný tah nemůže prvnímu hráči uškodit, což u hry Chomp neplatí. Aby měl první hráč zajištěnou vítěznou strategii musí použít jiný trik. Pokud by měl vítěznou strategii druhý hráč, první hráč by jednoduše mohl odebrat jen políčko, které je úplně vpravo dole. Toto políčko je odebráno i při jakémkoliv jiném úvodním tahu, proto mohou nastat jen dvě možnosti.

1) Odebrání tohoto políčka je přímo součástí vítězné strategie. To však pro druhého hráče není možné, protože pro něj tento tah nikdy nebude dostupný, takže druhý hráč by v tomto případě ani nemohl mít vítěznou strategii.

2) Součástí vítězné strategie druhého hráče je jakýkoliv jiný tah, ale to zase není možné, protože jej mohl provést i první hráč.

Důkaz je však nekonstruktivní, říká nám, že první hráč má vítěznou strategii, ale nedává nám žádné informace, jak vítězství dosáhnout. Chomp je ukázkou hry, která má hodně jednoduchá pravidla, ale složité nalezení vítězné strategie.

Hra je vyřešena jen pro některé triviální případy hracích ploch, kde je také snadné ukázat vítěznou strategii. Například pro jakékoliv čtvercové hrací plochy první hráč snadno vyhraje, pokud v prvním tahu odebere políčko, které na diagonále sousedí s otráveným políčkem a dále bude pokračovat symetricky podle tahu druhého hráče. Také pro hrací plochu o velikosti $2xN$, kde N je přirozené číslo větší, než jedna, je pro prvního hráče snadné vyhrát.

Situaci, kdy je v první řadě o jedno políčko více než ve druhé, budeme říkat pozice P a situaci, kdy je na hracím plánu pouze otrávené políčko nazvěme pozicí Q. Dále platí následující věty.

1) Q je speciálním případem pozice P.
2) Hráč, který je zrovna na tahu v pozici Q, musí odebrat otrávené políčko a prohraje.
3) Do pozice P je možné dostat se z jakékoliv pozice, kromě pozice P.
4) Pozici P je možné vytvořit v prvním tahu.

Z toho vyplývá, že pokud první hráč svým tahem vždy vytvoří pozici P, nemůže se mu stát, že by jej do této pozice vystavil druhý hráč. Ve hře máme konečný počet políček a v každém tahu alespoň jedno políčko odebereme. Proto je jasné, že pokud bude první hráč v každém tahu vytvářet pozici P, nakonec se někdy musíme dostat do pozice Q, ve které navíc na tahu bude druhý hráč, který prohraje. Jedinou možnost druhého hráče, jak tomu zabránit je sníst otrávené políčko dříve, než nastane pozice Q, ale to také znamená porážku druhého hráče. První hráč tedy může vždy vyhrát.

Strategie pro větší hrací plány

Nalézt vítězné strategie pro další velikosti hracích plánů je problém, protože pozice, do kterých se dostáváme, jsou většinou dost odlišné a je obtížné v nich najít určitý vzor. Právě odlišnost pozic, do kterých se snažíme dostat, dělá hru komplikovanou, a proto se zatím nepodařilo nalézt vítězné strategie pro větší hrací plány ani pomocí počítačových analýzy. Jsme však schopni rozeznávat vítězné a prohrávající pozice. Právě analýza těchto pozic je k dispozici v prezentaci, která je dostupná ke stažení pod odkazem [17].

10 Conway Soldiers

10.1 Charakteristika hry

Pravidla

Hrací plán tvoří nekonečně velká mřížka, na které leží vodorovná přímka. Na polích v polorovině pod přímkou jsou rozmístěny herní kameny. Kameny se mohou pohybovat přeskakováním jiných kamenů do čtyř stran, ne však diagonálně. Přeskočený kámen je odebrán ze hry. Cílem hry je dostat se alespoň s jedním kamenem co nejvýše nad přímku s využitím co nejmenšího počtu kamenů. Hra končí ve chvíli, kdy nemáme žádnou možnost provést tah.

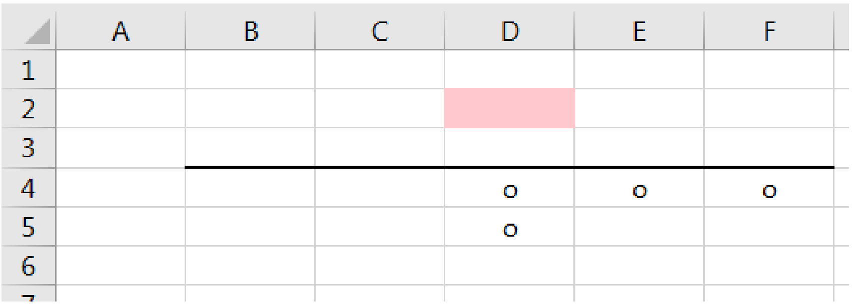
Zařazení hry

Z uvedených her se jedná o jedinou hru, kterou hraje jen jeden hráč. Jedná se spíše o takovou matematickou hádanku, takže nemůžeme hru zařadit podle kritérií uvedených na začátku práce. Hru jsem zařadil do své práce, protože hra má překvapivé řešení, při jehož dokazování se používá zajímavá matematika.

10.2 Strategie

Čerpáno z [21] a [22]. Zde se nezabýváme hledáním vítězné nebo neprohrávající strategie hráče. Hlavním problémem bylo zjistit, do jaké nejvyšší řady se můžeme s kamenem dostat a kolik kamenů potřebujeme, abychom se dostali do určité řady.

Pro dosažení první řady nad přímkou nám stačí dva kameny umístěny pod sebou v první řadě pod rozdělující přímkou. Do druhé řady nad přímkou se také dostaneme snadno. Pro dosažení druhé řady nám stačí čtyři kameny umístěny například takto.



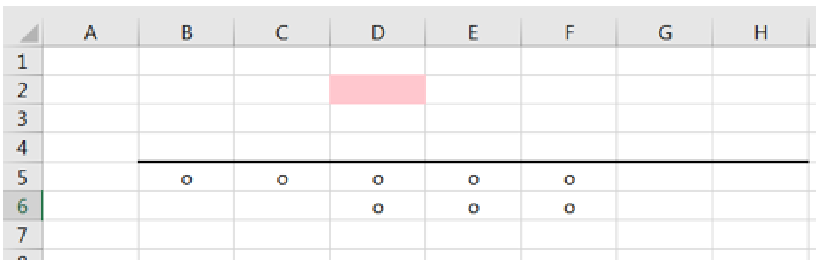
Obrázek 19: Umístění kamenů potřebné pro dosažení druhé řady

Následně červeně označeného políčka dosáhneme třemi tahy.

$d5 - d3, f4 - d4, d4 - d2$

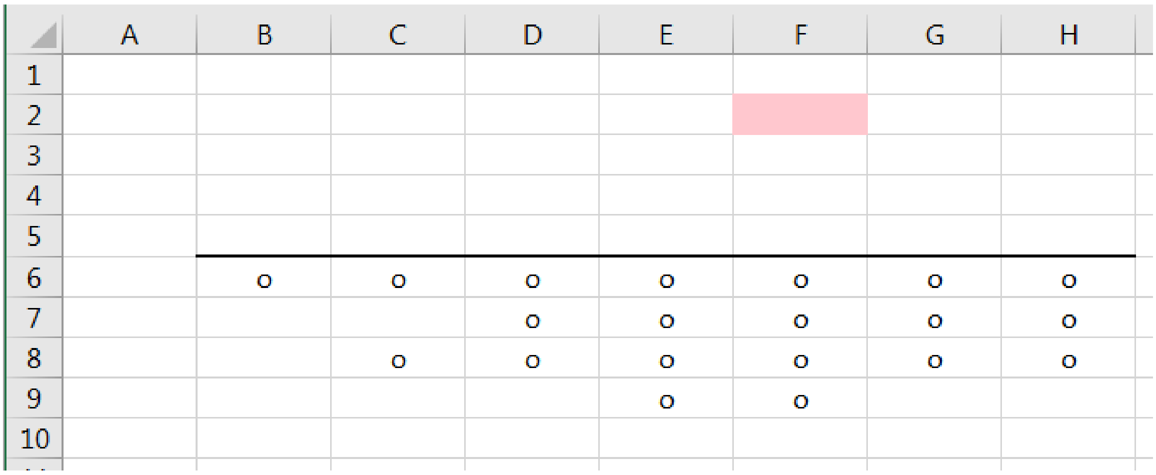
Ani dosažení třetí řady není nijak obtížné. Potřebujeme na to alespoň 8 kamenů. Jejich umístění je vidět na obrázku 20. Postupně musíme provést 7 tahů.

$e6 - e4, f6 - f4, d6 - d4, b5 - d5, d5 - d3, f4 - d4, d4 - d2$



Obrázek 20: Umístění kamenů potřebné pro dosažení třetí řady

Dosažení čtvrté řady už je složitější, ale pořád nám stačí pouze 20 kamenů. Obrázek 21 znázorňuje jednu z možností, jak lze kameny rozmístit.



Obrázek 21: Umístění kamenů potřebné pro dosažení čtvrté řady

Posloupnost tahů, které musíme provést je následující.

$f7 - f5, g7 - g5, h7 - h5, d6 - f6, f6 - f4, h5 - f5, f5 - f3, e8 - e6, b6 - d6, d6 - f6, f9 - f7, f7 - f5, b8 - d8, d9 - d7, c7 - e7, h8 - f8, f8 - f6, f6 - f4, f4 - f2$

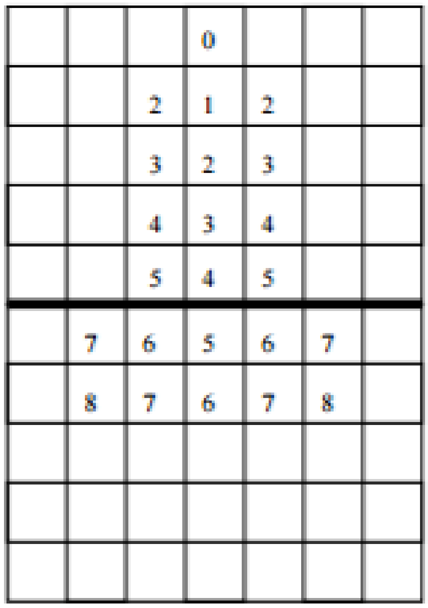
Ještě komplikovanější je to s pátou řadou. John Conway přišel v roce 1961 s velmi překvapivým zjištěním. Páté řady není možné dosáhnout, bez ohledu na to, kolik kamenů máme k dispozici [18].

10.3 Důkaz, že páté řady nelze dosáhnout

Nechť $a_1, a_2, ..., a_n$ je posloupnost reálných čísel.
Nekonečná řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je definována jako $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}(a_1 + a_2 + ... + a_n)$
Pokud limita existuje, řada konverguje, jinak řada diverguje.

Zvolme $\phi = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$, pak $\phi^2 + \phi = \frac{5+1-2\sqrt{5}}{4} + \frac{\sqrt{5}-1}{2} = \frac{6-2\sqrt{5}}{4} + \frac{-2+2\sqrt{5}}{4} = 1$

Označme políčko v páté řadě nad přímkou jako S. Všechna ostatní políčka jsou vzdálena od políčka S o určitou vzdálenost. Tuto vzdálenost můžeme definovat jako nejmenší počet políček, které musíme projít, abychom se z daného políčka dostali na políčko S.



Obrázek 22: Znázornění vzdáleností některých políček od políčka S

Označme potenciál každého z políček jako ϕ^i, kde i je vzdálenost tohoto políčka od políčka S. Potenciál počátečního uspořádání kamenů bude hodnota $\sum_{i=0}^{\infty} n(i)\phi^i$, kde $n(i)$ je počet políček ve vzdálenosti i od políčka S.

Pokud provedeme tah kamenem, kdy přeskočíme jiný kámen, celkový potenciál se nezmění. Je to z toho důvodu, že při tahu kamenem ve vzdálenosti m přeskočíme a odstraníme jiný kámen ve vzdálenosti $m - 1$ a dostaneme se na políčko do vzdálenosti $m - 2$. Pokud rovnost $\phi^2 + \phi = 1$ roznásobíme číslem ϕ^{m-2} dostaneme $\phi^m + \phi^{m-1} = \phi^{m-2}$. Tato rovnost vyjadřuje, že přesunutí kamene z políčka ϕ^m přes políčko ϕ^{m-1} na políčko ϕ^{m-2} zachová potenciál.

Zajímá nás, jaká je nejvyšší hodnota potenciálu při počátečním uspořádání kamenů. Nejvyšší potenciál dostaneme, pokud na každém políčku v dolní polorovině bude kámen.

Prostřední sloupec bude mít potenciál $\phi^5 + \phi^6 + \phi^7 + \phi^8 + ...$. Když zvolíme x takové, aby platilo $-1 < x < 1$, pak podle vzorce pro součet nekonečné geometrické řady dostaneme $1 + x^2 + x^3 + ... = \frac{1}{1-x}$

Z toho plyne, že prostředí sloupec má potenciál

$$\phi^5 + \phi^6 + ... = \phi^5 \cdot (1 + \phi + \phi^2 + ...) = \phi^5 \cdot \frac{1}{1-\phi} = \phi^5 \cdot \frac{1}{\phi^2} = \phi^3$$

Sloupec vedle prostředního má potenciál

$$\phi^6 + \phi^7 + ... = \phi \cdot (\phi^5 + \phi^6 + ...) = \phi * \phi^3 = \phi^4$$

A celkový potenciál bude

$$\phi^3 + 2\phi^4 + 2\phi^5 + 2\phi^6 + ... = \phi^3 + 2\phi^4 \cdot (1 + \phi + \phi^2 + ...) = \phi^3 + 2\phi^4 \cdot \frac{1}{1-\phi} =$$

$$= \phi^3 + \frac{2\phi^4}{\phi^2} = \phi^3 + 2\phi^2 = (\phi^3 + \phi^2) + \phi^2 = \phi + \phi^2 = 1$$

Hodnota celkového potenciálu je stejná jako potenciál cílového políčka S, protože $\phi^0 = 1$.
Z toho plyne, že nejvyšší možný potenciál je 1 a dosáhneme jej pouze v tom případě, když na všech polích v dolní polorovině budou kameny. Pokud však máme konečný počet kamenů, znamená to, že jsme nevyužili všechna políčka a proto celkový potenciál kamenů za hranicí musí být menší než 1.

Závěr: S konečným počtem kamenů je celkový potenciál menší než 1 a proto nejsme schopni dosáhnout políčka S v páté řadě nad hraniční přímkou. Dosažení pátého políčka by bylo možné pouze s nekonečným počtem kamenů. S nekonečným počtem kamenů můžeme dokonce dosáhnout i políček ve vyšších řadách.

11 Piškvorky

11.1 Charakteristika hry

Pravidla

Piškvorky jsou hra pro dva hráče, kde hráči střídavě umisťují odlišné symboly (typicky křížky a kolečka) na volná políčka na šachovnici. Vítězem hry se stane hráč, kterému se podaří umístit daný počet svých symbolů do jedné řady vodorovně, svisle nebo diagonálně.

Piškvorky mají více různých variant. V klasické variantě se snažíme umístit 5 symbolů vedle sebe. Další variantou, která je často rozebírána je hra zvaná tic-tac-toe, kde je cílem hry umístit jen 3 symboly vedle sebe a hraje se na šachovnici 3x3. Budu se taky věnovat 3D variantě tic-tac-toe a popíšu, jak je to se strategiemi pro některé velikost hracích plánů.

Zařazení hry

Silná poziční hra dvou hráčů s úplnou informací a bez vlivu náhody.

11.2 Strategie

Kvůli argumentu o kradení strategií nemůže existovat vítězná strategie pro druhého hráče.

Pokud by existovala vítězná strategie pro druhého hráče, mohl by první hráč zahrát první tah na libovolné místo a dále pokračovat podle strategie druhého hráče. Tomuto tahu budeme říkat zahozený tah. Můžeme jakoby předstírat, že první hráč žádný tah neudělal a tím ze sebe udělal druhého hráče. Problém nastane jedině tehdy, pokud by první hráč během své hry musel v určitou chvíli zahrát tah na místo, kde už udělal zahozený tah. Tento problém první hráč vyřeší tak, že ve chvíli, kdy má udělat tah na už obsazené místo zahozeným tahem, provede tah na jiné místo, které je pro hru zbytečné a dále pokračuje podle své strategie.

Aby strategie mohla fungovat, musí platit, že pokud první hráče provede zahozený tah, nemůže mu to nijak uškodit. Je jasné, že takhle podmínka platí, protože políčko ve hře navíc bude pro prvního hráče buď neutrální, nebo mu pomůže. Nemůže se stát, že by nějak pomohlo druhému hráči.

Existuje tedy neprohrávající pro začínajícího hráče. Mluvíme zde o neprohrávající strategii, ne o vítězné, protože v některých variantách hry může nastat remíza, a jak si později ukážeme, druhý hráč si ji někdy dovede vynutit.

11.3 Piškvorky 3x3

Další variantou, která je často rozebírána je hra zvaná tic-tac-toe, kde je cílem hry umístit jen 3 symboly vedle sebe a hraje se na šachovnici 3x3. Dá se ukázat, že i druhý hráč má neprohrávající strategii [22].

Označme prvního hráče jako X a druhého hráče jako O. Pokud oba hráči hrají dobře, hra vždy skončí remízou. Za předpokladu, že nebudeme uvažovat symetrie má hra 138 odlišných konečných herních pozic. V 91 z nich je vítězem hráč X, ve 44 pozicích hráč O a jen 3 pozice jsou remízové.

Očíslujme hrací plán následujícím způsobem.

1	2	3
4	5	6
7	8	9

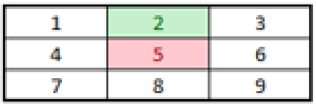
Obrázek 23: Očíslování hracího plánu

Hráč X má tři možnosti, jak provést první tah. Může hrát doprostřed (políčko 5), do rohu (1,3,7,9), nebo na kraj (2,4,6,8). Postupně si uvedeme, jak musí hráč O postupovat, aby dosáhl remízy pro všechny možné začátky hráče X.

11.3.1 Obrana proti začátku na kraji

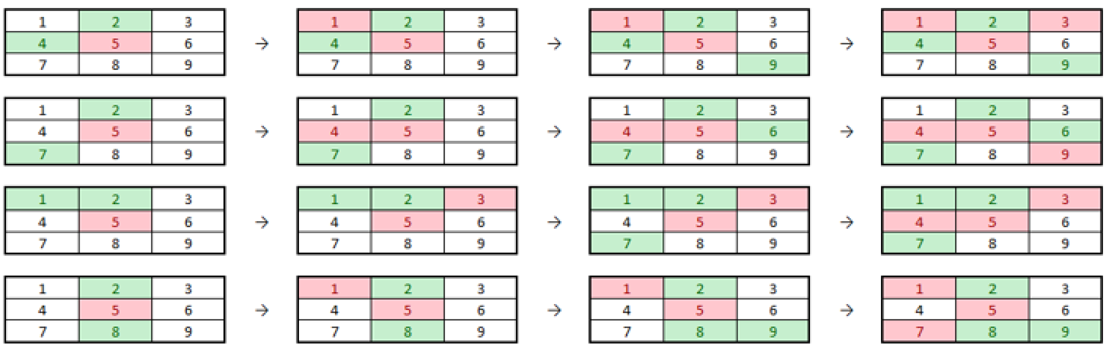
Pravděpodobně nejslabším tahem hráče X je začít na kraji na jednom z políček 2, 4, 6, nebo 8. U perfektně hrajících soupeřů samozřejmě nemá smysl bavit se o nejslabším nebo nejsilnějším počátečním tahu, protože hra stejně vždycky skončí remízou. Ale celkově proti začátku na kraji je pro hráče O nejjednodušší se bránit a taky políčkem na kraji prochází jen dvě trojice zajišťující vítězství. Proto jsem tento tah označil jako nejslabší.

Například po tahu na políčko 2 se druhý hráč může snadno bránit tahem doprostřed. Ostatní políčka na kraji nebudeme řešit, protože pozice bude vždycky symetrická. Pro důkaz, že si hráč O dokáže vynutit remízu nám bude stačit popsat všechny možnosti obrany proti tahu hráče X na jedno z krajních políček. Políčka obsazena hráčem X budeme označovat zeleně a políčka obsazena hráčem O budou označeny červeně. Bílá políčka jsou dosud neobsazená.



Obrázek 24: Začátek obrany hráče O proti počátečnímu tahu na kraj

První hráč pak může reagovat čtyřmi způsoby a dále druhý hráč pokračuje podle schématu na obrázku 25 a nikdy nemůže prohrát. Ostatní pozice jsou symetrické. Schéma není dotaženo úplně do konce, ale z posledních pozic na obrázku je už jasné, že druhý hráč může zajistit remízu. Tahy hráče X jsou vždy vynucené, kdy musí blokovat druhého hráče. Ve třetí větvi jsou dokonce vynuceny i tahy hráče O. Celkově druhému hráči stačí zapamatovat si dohromady jen sedm tahů (první tah doprostřed a pak vždy po dvou tazích ve větvích 1,2 a 4) a nikdy neprohraje. Navíc po tazích $X2 - O5 - X8 - O1 - X9 - O7$ se druhý hráč O dokonce dostane do pozice, která později povede k vítězství hráče O.



Obrázek 25: Schéma obrany hráče O proti počátečnímu tahu na kraj

11.3.2 Obrana proti začátku v rohu

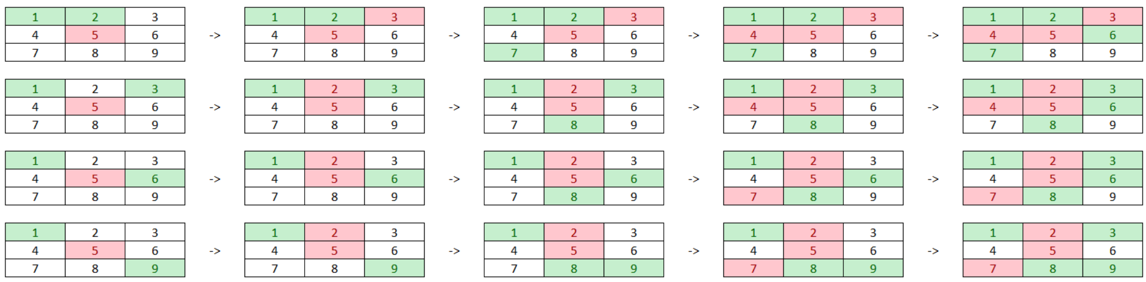
O něco lepší možností pro prvního hráče je začít v rohu, ale druhý hráč stále může, a dokonce musí, odpovědět tahem doprostřed.

1	2	3
4	5	6
7	8	9

Obrázek 26: Začátek obrany hráče O proti počátečnímu tahu do rohu

Neprohrávající strategie druhého hráče je znázorněna na obrázku 27. Jakýkoliv jiná odpověď druhého hráče může vést k jeho porážce nejpozději v sedmém tahu za předpokladu, že první hráč dovede nabízené výhody využít.

Když nebudeme uvažovat symetrické pozice, znovu nám stačí čtyři větve, pomocí kterých jsme schopni popsat všechny možnosti, které mohou nastat. Všechny tahy hráče X jsou opět vynucené, takže hráč O nemusí řešit další větvení herních pozic a stačí mu pamatovat si své vlastní tahy.



Obrázek 27: Schéma obrany hráče O proti počátečnímu tahu do rohu

11.3.3 Obrana proti začátku uprostřed

Z pohledu prvního hráče X považuji začátek uprostřed hracího plánu za nejlepší možnost, protože středové políčko mu jako jediné dává čtyři možností vytvoření vítězné trojice (dvě diagonály, jednu horizontální řadu a jednu vertikální řadu). Tato situace je nejsložitější na rozbor, protože druhý hráč si nedovede průběh celé hry vynutit a první hráč má v některých svých tazích na výběr z více možností a dochází k dalšímu větvení schématu obrany hráče O.

Druhý hráč nejprve musí vždy reagovat tahem do rohu, protože pokud zahraje na kraj, první hráč může vždy vyhrát. Po tazích $X5 - O2 - X7 - O3(vynucený) - X1$ druhý hráč není schopen zabránit své porážce, jak můžeme vidět na obrázku 28.

1	2	3
4	5	6
7	8	9

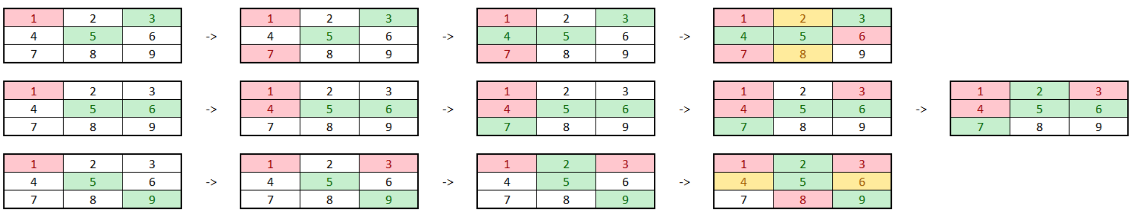
Obrázek 28: Nevyhnutelná porážka hráče O po špatném začátku

Hráč O tedy musí na první tah vždy reagovat tahem do rohu.

1	2	3
4	5	6
7	8	9

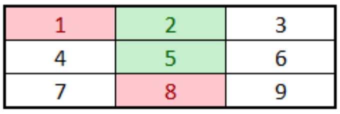
Obrázek 29: Začátek obrany hráče O proti počátečnímu tahu doprostřed

Znovu nebudeme uvažovat symetrické pozice a také nám znovu vzniknou čtyři možnosti pro prvního hráče, jak provést další tah. Na obrázku 30 jsou popsány tři z těchto možností. Zde si druhý hráč dokáže vynutit průběh celé hry jen ve druhé větvi. V první a třetí větvi si může první hráč ve svém čtvrtém tahu vybrat svůj další tah. Druhý hráč pak v dalším tahu musí obsadit jedno ze žlutě označených políček, a znovu dojde k remíze.



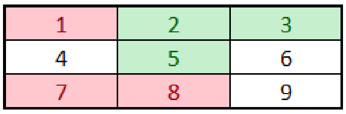
Obrázek 30: Tři větve obrany hráče O proti počátečnímu tahu doprostřed

Nejsložitější je situace v poslední zbývající větvi, kde první hráč má už ve svém třetím tahu dalších pět možnosti, jak táhnout, z nichž žádné dvě možnosti nejsou symetrické. Dojde k dalšímu větvení, na které musí být druh hráč schopen účinně reagovat.



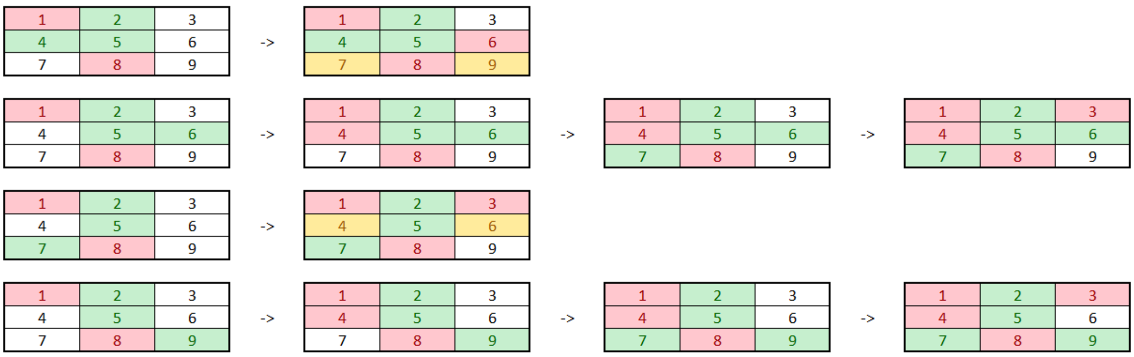
Obrázek 31: Začátek poslední větve obrany hráče O proti počátečnímu tahu doprostřed

Po tazích $X5 - O1 - X2 - O8 - X3 - O7$ dokonce hráč X dále nedovede zabránit své porážce, jak vidíme na obrázku 32, takže hráč X by měl v dalším tahu pokračovat obsazením jednoho z políček 4,6,7,9.



Obrázek 32: Porážka hráče X

Dále je obrana hráče O znázorněna na obrázku 33.Význam žlutých políček zde funguje stejně jako na předchozím obrázku 30.

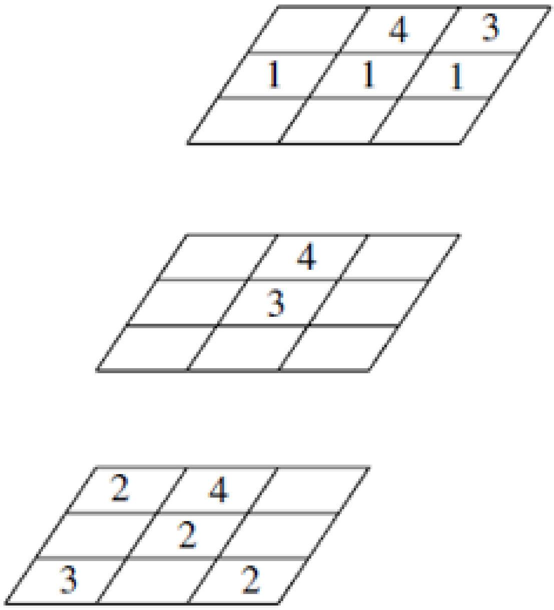


Obrázek 33: Obrana hráče O ve zbývajících možnostech průběhu hry

Tímto jsme popsali všechny možnosti, které mohou nastat. A jak vidíme, druhý hráč si skutečně může vždy vynutit remízu a má tedy stejně jako první hráč neprohrávající strategii.

11.4 Trojrozměrné Tic-Tac-Toe

Pravidla jsou stejná jako pro klasické Tic-Tac-Toe. Vítězství pak lze dosáhnout čtyřmi způsoby. Dva z nich jsou už známy z dvojrozměrných piškvorek a další dvě možnosti jsou prostorová řada tří symbolů a prostorová diagonála tří symbolů. Všechny čtyři typově odlišné možnosti vítězství jsou znázorněny na obrázku 34



Obrázek 34: Možnosti vítězství v Tic-Tac-Toe 3x3x3

Ve variantě 3x3x3 nemůže dojít k remíze, což znamená, že má vítěznou strategii první hráč kvůli argumentu o kradení strategií. Strategie je následující [23].

Dohromady v této variantě existuje 49 možností, jak vytvořit trojici zajišťující vítězství.

9 pozic vodorovně zleva doprava
9 pozic vodorovně zepředu dozadu
9 pozic svisle shora dolů
6 pozic v úhlopříčkách jednotlivých vodorovných vrstev
6 pozic v úhlopříčkách jednotlivých svislých vrstev zepředu dozadu
6 pozic v úhlopříčkách jednotlivých svislých vrstev zleva doprava
4 pozic v tělesových úhlopříčkách krychle

Následující obrázek znázorňuje, kolik vítězných trojic prochází jednotlivými políčky. Obdélníky 3x3 chápeme jako patra krychle, které jsou při hře položeny nad sebou.

7	4	7		4	5	4		7	4	7
4	5	4		5	13	5		4	5	4
7	4	7		4	5	4		7	4	7

Obrázek 35: Počet vítězných trojic procházejících jednotlivými políčky 3x3x3

Najít vítěznou strategii prvního hráče zde nebude obtížné, protože středovým políčkem prochází 13 vítězných trojic, takže po jeho obsazení bude snadné dosáhnout vítězství. Při jakékoliv obraně druhého hráče je první hráč schopen vyhrát nejpozději ve svém čtvrtém tahu.

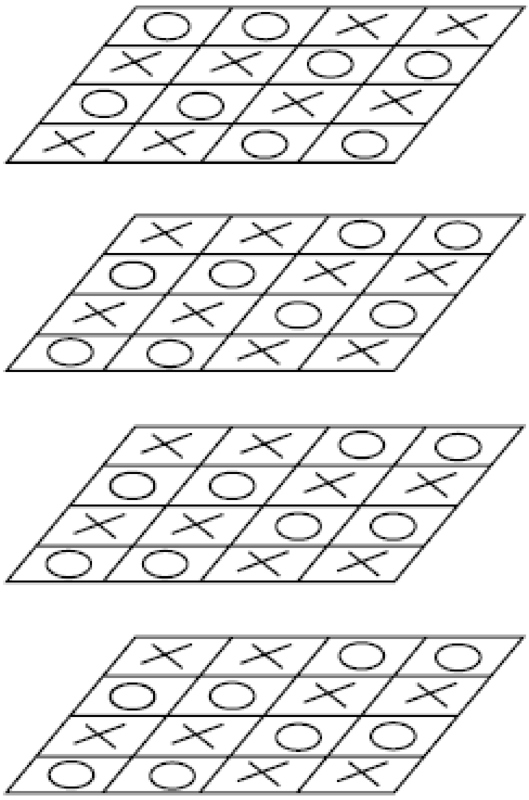
Vyhrávající strategie prvního hráče:

Označme rohová pole písmenem R, pole uprostřed stěny krychle jako S a pole uprostřed hran krychle jako H.

1) Jako první obsadit střed krychle.
2 a) Po tahu druhého hráče na pole R, nebo pole H obsadit pole S co nejblíže pole obsazeného druhým hráčem
2 b) Po tahu druhého hráče na pole S obsadit jiné pole S, tak aby obě pole S neležely na protilehlých stěnách krychle
3) Po vynuceném obranném tahu druhého hráče vytvořit vidličku obsazením pole H, které sousedí s předtím obsazeným polem S.
4) Po jakémkoliv dalším tahu druhého hráče vytvořit trojici, které nemohl druhý hráč zabránit.

Spravedlivější je krychle o rozměrech 4x4x4, protože nemá středové pole a hra je více vyrovnaná, protože možnost prvního tahu nepřináší tak velkou výhodu jako u hracího plánu 3x3x3. Cílem hry je zde vytvoření řady čtyř symbolů. Na krychli 4x4x4 může dojít i k remíze.

Nakonec i na krychli 4x4x4 bylo v roce 1977 dokázáno, že první hráč má vítěznou strategii, ale důkaz byl už hodně komplikovaný [20]. Důkaz provedl matematik Oren Patashik, který vítěznou strategii popsal jako dlouhou posloupnost tahů, která druhého hráče neustále nutí svými tahy blokovat vítězství prvního hráče, až se hra dostane do situace, kdy už to není možné a druhý hráč tomu nemohl nijak zabránit. Řešení dohromady tvoří popis 2929 strategických tahů, které zahrnují všechny možnosti, jak se druhý hráč může bránit.



Obrázek 36: Ukázka remízové pozice

Strategie pro vyšší rozměry jsou stále otevřeným problémem. Není známo, zda má první hráč vítěznou strategii pro $NxNxN$, kde $N > 4$ a ani pro hrací plány vyšších dimenzí nebylo zatím nic dokázáno.

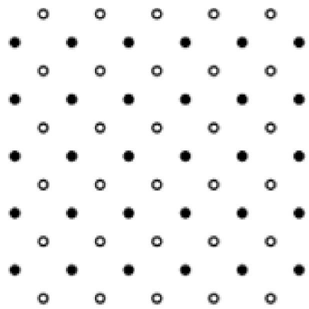
11.5 Klasická varianta

Bylo dokázáno, že na hracím poli 15x15 a na větších konečných plochách má první hráč vítěznou strategii, protože druhý hráč nemůže na tomto prostoru vynutit remízu. [19] Na menších hracích plochách si druhý hráč remízu může vynutit, protože první hráč je omezen malým prostorem.

12 Bridge-it

12.1 Pravidla

Máme herní plán jako na obrázku 37. Plán obsahuje n řad po n + 1 černých vrcholech a n + 1 řad po n bílých vrcholech. Dva hráči střídavě spojují vždy dva vrcholy své barvy hranou barvy. Hrany mohou být vedeny pouze svisle nebo vodorovně. Cílem hry prvního (černého) hráče je spojit alespoň jednou cestou levý herní kraj herního plánu s pravým krajem. Podobně bílý hráč se snaží spojit cestou horní okraj hracího plánu se spodním okrajem. Hrany se nesmí křížit, a proto každý most jednoho hráče zamezí jednomu tahu druhého hráče. Navíc, protože každá cesta spojující dva protilehlé okraje rozdělí hrací plán na dvě části, může při libovolném rozložení hran vyhrát jen nejvýše jeden hráč.



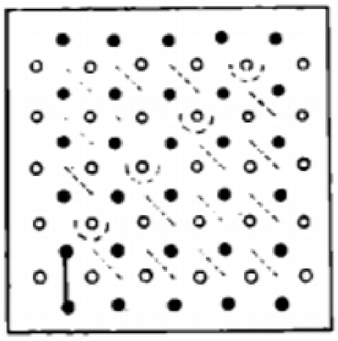
Obrázek 37: Hrací plán hry Bridge-it

12.2 Strategie

Je známo, že první hráč má vítěznou strategii. Znovu můžeme použít argument o kradení strategií. Pokud by druhý hráč měl vítěznou strategii, první hráč může zahrát libovolný tah, který nebude nic řešit a poté pokračovat podle strategie druhého hráče. Ve chvíli, kdy podle strategie bude muset v průběhu hry zahrát tah, který udělal na začátku, jednoduše udělá jiný libovolný tah. Vítězná strategie prvního hráče se dá popsat dvěma způsoby.

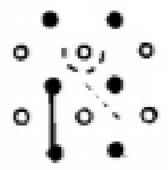
12.3 Popis vítězné strategie přes párování

[24] První ze způsobu je znázorněn na obrázku 38. První hranu musí začínající hráč s černou barvou vést, tak jak je znázorněno na obrázku. Jestliže bílý vede hranu procházející koncovým bodem některé z úseček nebo oblouků označených na tomto obrázku čárkovaně, černý musí vést hranu, tak aby procházela druhým koncovým bodem. Tato hrana je vždy určena jednoznačně. Pokud už taková hrana existuje, může černý vést libovolnou hranu. Vede-li bílý hranu, která žádným koncovým bodem úsečky neprochází, může černý zase vést libovolnou hranu. Tato strategie černého vždy dovede k vítězství.



Obrázek 38: Obrázek znázorňující vítěznou strategii prvního hráče

Proč tato strategie funguje si můžeme ukázat na triviálním příkladu na zjednodušeném hracím plánu. Představme si, že hrajeme hru Bridge-it jen s omezeným počtem vrcholů.



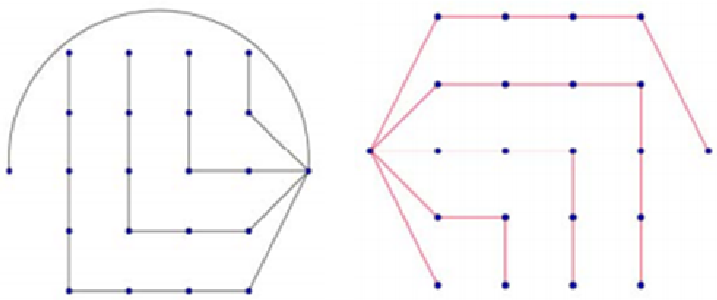
Obrázek 39: Zjednodušené schéma hry bridge-it

První tah černého hráče je stále stejný. Aby bílý odvrátil porážku v dalším tahu, potřebuje černému hráči zablokovat možnost doplnit zbývající hranu v levém sloupci s černými vrcholy. Bílý tedy povede hranu ze svého levého horního vrcholu do prostředního vrcholu v horní řadě. Černý ve svém druhém tahu zareaguje podle výše uvedeného popisu a tím vystaví bílého hráče do neřešitelné situace. Všimněme si, že svým tahem zároveň zamezí bílému hráči propojit levou a pravou stranu. Černý pak ve svém třetím tahu bude mít dvě možnosti, jak vyhrát a bílý nemůže zablokovat obě najednou. A v tom je celý smysl strategie. Černý buď spojí všechny vrcholy v jednom sloupci, a nebo se mu podaří dosáhnout vítězné pozice spojením obou sloupců.

Jakkoliv velký hrací plán pak můžeme vždycky rozložit na několik zjednodušených hracích plánů stejných jako jsme si ukázali na obrázku 39. Tyto triviální případy na sebe mohou postupně navazovat. Celé schéma se posune buď nahoru, a nebo doprava podle toho jakou možnost zvolí bílý hráč. Černý pak může postupovat analogicky a své vrcholy postupně spojovat, dokud nepropojí obě potřebné strany.

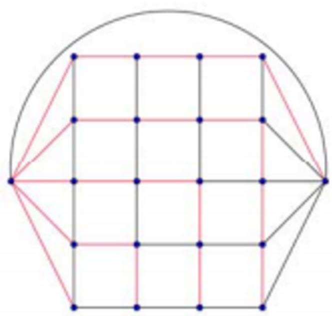
12.4 Popis vítězné strategie přes kostry grafu

[25] Druhý způsob vítězné strategie lze popsat přes kostry grafu. Nejprve můžeme levé i pravé vrcholy spojit do jednoho, protože pro dosažení vítězství nezáleží na tom, které vrcholy z levého a pravého sloupce spojíme. První hráč si následně představí nad svým hracím plánem dvě hranově disjunktní kostry. Vrcholy odpovídají vrcholům hracího plánu a hrany představují všechny možné tahy.



Obrázek 40: Dvě hranově disjunktní kostry grafu

Když obě kostry spojíme dostaneme následující graf. Hrana přímo spojující levý a pravý vrchol je fiktivní a zajišťuje souvislost grafu.



Obrázek 41: Spojení obou koster

Pokud jsme nalezli dvě hranově disjunktní kostry grafu, znamená to, že první hráč může spojit obě své strany dvěma různými způsoby. Druhý hráč každým svým tahem vlastně zablokuje jednu z hran. Pokud druhý hráč zablokuje jednu z hran, stále bude existovat jiná hrana, kterou může první hráč použít a obnovit souvislost první kostry a tuto hranu už druhý hráč nebude moct zablokovat. Jinak řečeno na každý tah druhého hráče (tj. přerušení jedné z jeho koster) reaguje první hráč tak, že vyznačí hranu druhé kostry, která spojuje dvě části jeho vybrané kostry. Vyznačená hrana se přidá do obou koster. Tímto způsobem zůstávají obě kostry grafu stále souvislé i po libovolném dalším přípustném tahu druhého hráče, který tímto nemůže spojit své protilehlé strany cestou, neboť by musel porušit souvislost grafu G. První hráč tedy může vždy vyhrát.

13 Hra na četníky a zloděje

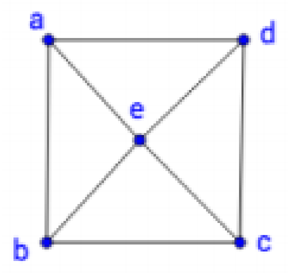
13.1 Pravidla

Hra probíhá na nějakém konečném neorientovaném grafu, kde se lze přes hrany z každého vrcholu dostat na libovolný jiný vrchol. Jedním z hráčů je vždy zloděj, který má jednu figurku, nebo kámen další hráč je četník, který však může mít i více kamenů. Na začátku hry si četníci zvolí počáteční vrcholy a poté si počáteční vrchol vybere i zloděj s ohledem na vrcholy četníků. Ve hře se všichni hráči střídají v tazích a tah vždy probíhá tak, že se hráč přemístí na sousední vrchol, nebo zůstane stát na místě. Hru začínají četníci. Pokud se četník a zloděj ocitnout na stejném vrcholu, četníci vítězí. Zloděj se stane vítězem, pokud dovede unikat do nekonečna. Hra má hodně variant podle toho, na jakém grafu se hraje a taky můžeme zavést, že se hráči mohou pohybovat i větší rychlostí, například během jednoho tahu se přemístíme o dva vrcholy.

13.2 Strategie a cop-number

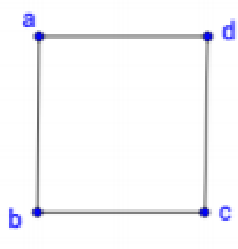
Při řešení strategií zjišťujeme, za jakých podmínek vyhrávají četníci a kdy zase zloděj. Hlavní otázkou obvykle je, kolik četníků je minimálně potřeba, aby bylo zajištěno jejich vítězství. Minimální počet četníků potřebných pro chycení zloděje se označuje jako cop-number, které na grafu G značíme jako $cn(G)$. Hra má mnoho různých variant, kterými se lze zabývat. Můžeme měnit rychlost četníků i zloděje, upravovat strukturu grafu, měnit počet četníků, nebo uvažovat nerovinné grafy.

[32] Začněme nejprve s nejjednodušším případem, kdy je ve hře jen jeden četník. Jedním z příkladů situace, kdy má četník vítěznou strategii je na obrázku 42. Četník si jako výchozí vrchol vybere vrchol e a poté může vždy chytit zloděje ve svém prvním tahu.



Obrázek 42: Ukázka grafu, kde má četník vítěznou strategii

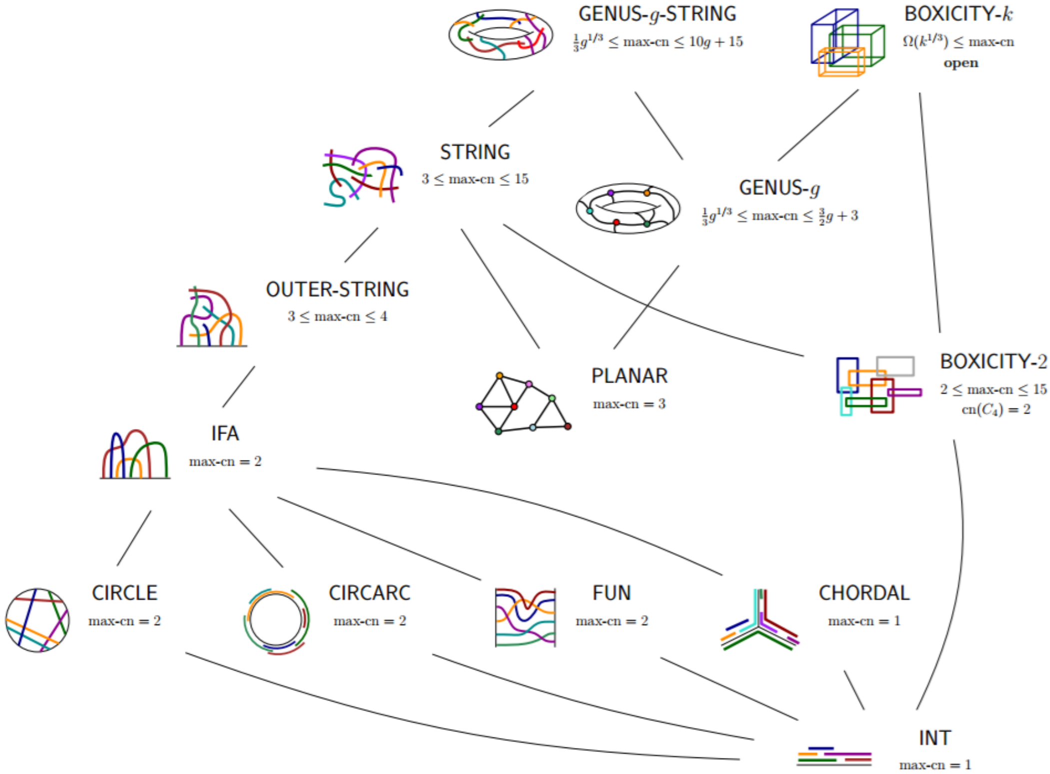
Obrázek 43 zase ukazuje triviální případ grafu, kdy má vítěznou strategii zloděj.



Obrázek 43: Ukázka grafu, kde má zloděj vítěznou strategii

Jeden četník však obvykle nebude stačit na chycení zloděje. Grafy, na kterých bude mít jen jeden četník vítěznou strategii musí být speciálního tvaru, kde četníků potřebuje mít možnost zahnat zloděje někam do rohu. Mezi takové grafy budou patřit například všechny cesty konečné délky, všechny stromy konečné velikosti, nebo cykly, kde je uvnitř cyklu vrchol, ze kterého vedou hrany do všech ostatních vrcholů cyklu. Zloděj bude zase mít vítěznou strategii například na všech rovinných grafech, kde se nachází oblast s hranicí délky alespoň čtyři.

Na většině složitějších grafů jeden četník stačit nebude a nejdůležitějším problémem, kterým se při hře má smysl zabývat, je zjišťování cop-number podle typu grafu. Hrou na četníky a zloděje se zabýval Tomáš Gavenčiak, který publikoval několik prací, zabývající se tímto tématem. Jejich přehled je na stránce http://gavento.ucw.cz/research.html. Právě v jeho doktorské práci [33] se objevuje přehled typů grafů (obrázek 44), kde pro třídu grafu C, číslo max_cn(C) vyjadřuje maximální $cn(G)$ na souvislém grafu G ze třídy C.



Obrázek 44: Přehled typů grafu s maximálním cn(G)

14 Další typy her

V práci jsem se věnoval hlavně kombinatorickým hrám, ale s teorií grafů souvisí i další typy her.

14.1 Spojovací hry

Spojovací hry jsou speciálním případem her, kde je cílem hry obvykle vytvořit určitý typ spojení mezi svými kameny. Může se jednat o vytvoření cesty mezi dvěma cíli, vytvoření smyčky, nebo propojení všech svých kamenů. V kapitole 5 je uvedena hra hex, která je typickou ukázkou spojovací hry. Mezi další takové hry patří například hry Dots and boxes[27], Havannah[30], nebo TwixT[29].

14.2 Patrolovací hry

Patrolovací hry jsou hry dvou hráčů, kde jeden z nich je obránce a druhý útočník. Cílem obránce je střežit vrcholy tím, že je navštěvuje, cílem útočníka je zaútočit na vybraný vrchol, aniž by byl obráncem objeven. U těchto her se však už začíná vyskytovat role náhody a má smysl mluvit o Nashově rovnováze. Patrolovací hry jsou podrobněji zpracovány v jiné bakalářských prací. [26]

14.3 Hra Nim

V základní variantě této hry máme n různých hromádek a v každé z nich je umístěn konečný počet sirek. Dva hráči se střídají v tazích a tah vždy probíhá tak, že hráč odebere z jedné z hromádek alespoň jednu sirku. Hráč, který odstraní poslední sirku prohrává. Hra existuje i v jiných podobách s upravenými pravidly, například můžeme hráčům během svého tahu povolit odebrat alespoň jednu sirku z více než jedné z hromádek. Nebo taky můžeme hrát misère variantu hry, kde cílem hry je naopak odstranit poslední sirku. Podrobněji v [28].

15 Otevřené Problémy

Na závěr si uvedeme také shrnutí některých otevřených problémů, které na hry mohou navazovat. Otevřené problémy souvisí s tabulkou č.2, kde za otevřené problémy můžeme považovat hledání strategií, které dosud nebyly objeveny. V tabulce je sice často uvedeno, že hra je kompletně vyřešena. Týká se to však jen konkrétní varianty hry a obvykle existují další rozšíření hry, kde zatím nejsou kompletní informace o strategiích a je prostor objevovat nové informace.

Strategie pro velké hrací plány

První myšlenkou, která se nabízí je zabývat analýzou her s hracími plány velkých rozměrů, pro které dosud nebyla objevena strategie.

Například u Šproutů zůstává problémem nalezení vítězných strategií až pro vysoký počet počátečních vrcholů. Podle [6] u klasických Šproutů neznáme strategie pro větší počet vrcholů než 44 s výjimkou 46,47 a 53 počátečních vrcholech, kde už strategie byla nalezena. Pro misère variantu neznáme vítězné strategie od 21 počátečních vrcholů. Při dalších analýzách hry by však místo hledání dalších strategií mohla být větší snaha potvrdit hypotézu [5], která říká, kdo má vítěznou strategii pro libovolný počet počátečních vrcholů, ale nebyla zatím potvrzena.

Pro další hry budeme mít podobný problém, protože obvykle neznáme strategie pro vyšší hrací plány. V Hexu víme, že první hráč zde má vítěznou strategii, ale pro rozměry větší, než 10x10 nevíme, jak ji najít. Podobný problém máme i v Hexapawnu, kde taky neznáme strategie pro větší hrací plány. U Hexapawnu však zrovna neočekávám, že budou v blízké době přibývat nové výsledky. Očekával bych, že pokud se někdo bude zabývat podobným typem hry, bude řešit pozice pro složitější hry, než je Hexapawn a bude věnovat se věnovat například pozicím v šachu.

Strategie pro prostorové varianty hry

Také obvykle nejsou dostatečně prozkoumány prostorové varianty hry. Samozřejmě ne u všech her je možné hrát i v prostoru. U her, kde má smysl uvažovat trojrozměrné hrací plány lze očekávat další analýzy. Na druhou stranu trojrozměrné varianty her bývají často příliš složité jak pro analýzu, tak pro naše myšlení a nikdy se neujmou tak dobře, jako původní hry. U piškvorek už existuje trojrozměrná varianta, ale dosud se nepodařilo nalézt vítěznou strategii ani pro hrací plán 5x5x5. Navíc je těžko představitelné, že by se lidé této hře aktivně věnovali, protože bude příliš složitá.

Vývoj algoritmů

Myslím si, že vývoj algoritmů má největší potenciál a navíc má i praktické využití. O rozvoj výpočetní techniky je velký zájem, a právě vývoj algoritmů může rychle vést k nalezení zjednodušených herních strategií. Navíc souboje mezi umělou inteligencí a lidmi jsou brány jako prestižní a atraktivní, což bylo nejvíce vidět u šachového souboje mezi Kasparovem a softwarem Deep Blue. Objevuje se stále více her, kde jsou jedni z nejlepších hráčů poraženi počítačem. Známým příkladem z nedávné minulosti je vítězství počítače nad člověkem ve hře Go. Poznatky ze soubojů mezi člověkem a počítačem v různých hrách mohou být dále použity pro vývoj umělé inteligence, která následně může být použita v továrnách, dopravě, zdravotnictví, ekonomice a dalších oblastech.

16 Závěr

Na závěr uvedeme shrnutí her, kde budou přehledně vidět informace o dosud známých strategiích, otevřené problémy a odkazy, pod kterými je možné si hru vyzkoušet.

U her, které jsme si představili, se setkáváme s odlišnými informacemi o řešeních hry. Například hru s názvem Podvodní šprouti [kapitola 4] nemá smysl hrát, protože je předem dané, který z hráčů vyhraje. Není to úplně obvyklý případ, ale můžeme na tomto příkladu hry demonstrovat, že mohou existovat hry s předem daným výsledkem, bez ohledu na to, jakým způsobem hrají oba hráči.

Dále se můžeme setkat s variantami her, které jsou příliš jednoduché, a proto nemá moc velký smysl je hrát, protože za předpokladu, že hráči hrají rozumně, hra skončí vždy stejným výsledkem. V takových případech jsou obvykle zajímavější jiné varianty těchto her s větším hracím plánem, nebo rozšířením pravidel. Ukázkou takové hry je Hexapawn [kapitola 7]. V jedné z předchozích kapitol jsme si ukázali, že pro hrací plán o velikosti 3x3 mají neprohrávající strategii oba hráči a nalezení strategií je triviální. I bez znalosti strategie bychom zde měli být schopni hru vždy dotáhnout k remíze. Hra je však zajímavější pro větší hrací plány a taky na hru navazují další typově podobné hry.

Jiným příkladem jednodušší hry je Tic-tac-toe [kapitola 11]. U Tic-tac-toe taky mají neprohrávající strategii oba hráči a nalezení strategií nebylo nijak obtížné, ale pokud hru hrajeme poprvé a nemáme žádné informace o strategiích, může být pro nás z pozice druhého hráče obtížné vynutit si remízu. Myslím si, že pokud hráč, který nemá žádné informace o strategiích, bude opakovaně hrát proti nejvyšší úrovni počítače na stránce http://ostermiller.org/calc/tictactoe.html, prohraje během prvních 20 her alespoň jednou. A pokud ne, hra pro něj nebude jednoduchá, protože bude muset neustále přemýšlet o svých tazích. Se znalostí neprohrávající strategie už hra samozřejmě moc zajímavá nebude a bude lepší vyzkoušet složitější variantu piškvorek.

Je jasné, že informace, kdo má vítěznou nebo neprohrávající strategii, je důležitá pro další analýzu hry, ale není tak důležitá pro hráče samotné. Díky argumentu o kradení strategií sice u většiny her víme, že existuje vítězná strategie pro prvního hráče, ale jen u některých her jsme schopni vítěznou strategii popsat. Často je vítězná strategie známá jen pro malé hrací plány a její nalezení pro větší hrací plány představuje problém. Nejvýrazněji je to vidět u hry Chomp, kde víme, že první hráč má vítěznou strategii, ale máme hodně málo informací, jak vítězství dosáhnout. A nakonec ani nalezení vítězné strategie nemusí být pro hráče důležité. U složitějších her strategie může být tak složitá, že není v lidských silách si ji zapamatovat. Pokud nemáme k dispozici jednoduchý algoritmus, podle kterého můžeme hrát, nalezení vítězné nebo neprohrávající strategie vůbec nemusí mít vliv na zajímavost hry, což je vidět například u Hexu a

Simu [kapitoly 5 a 6]. Naopak ve hře Bridge-it byl v rámci vítězné strategie popsán jednoduchý algoritmus, který prvního hráče vždy dovede k vítězství [kapitola 12].

Tabulka č.1 znázorňuje přehled informací o existenci strategií. Sloupcem s označením remíza máme na mysli, zda hra může skončit remízou. Zkratky VS a NS znamenají vítězná strategie a neprohrávající strategie. Pokud platí, že oba hráči mají neprohrávající strategii, znamená to, že pokud oba hrají bezchybně, hra vždy skončí remízou. Jak můžeme vidět v tabulce, obvykle je ve výhodě první hráč a často díky argumentu o kradení strategií můžeme říct, že první hráč má neprohrávající strategii. Ve hrách, kde nemůže nastat remíza, z toho automaticky plyne, že existuje vítězná strategie pro prvního hráče. Sim a některé varianty Šproutů jsou jediné hry, kde má vítěznou strategii druhý hráč.

Můžeme vidět, že u každé z vybraných her máme informace o existencích strategií. Tabulka č.1 však vyjadřuje, zda vyhrávající nebo neprohrávající strategie existuje, neznamená to, že strategii známe. V tabulce č.2 už je ve sloupci řešení hry je popsáno, za jakých podmínek vítěznou nebo neprohrávající známe. Pokud je v tabulce uvedeno, že hra je kompletně vyřešena, znamená to, že známe vítěznou nebo neprohrávající strategii pro všechny varianty této hry.

Důležitým poznatkem je, že téměř u každé hry je stále prostor objevovat nové informace a pokud je hra dostatečně zajímavá, strategie jsou stále předmětem diskuzí a analýz. Vzhledem k tomu, že jsme pomocí počítačů dnes schopni úspěšně analyzovat i hry s neúplnou informací, dá se očekávat, že budou s rozvojem výpočetní techniky v nejbližší době přibývat nové důkazy a informace o strategiích. U her, kde je strategie už kompletně popsána se mohou objevovat další varianty této hry (například se hra rozšíří do více dimenzí) a dochází k úpravě pravidel a vývoji algoritmů. U her, kde už byla nalezena vítězná, nebo neprohrávající strategie můžeme zkoušet hledat algoritmy, pomocí kterých budeme schopni popsat strategii způsobem, který bude možné si pamatovat a použít během samotné hry, přestože dnes nevíme, zda takový algoritmus vůbec existuje.

Jedním z cílů této přehledové práce bylo vytvořit základ, na který by mohly navázat další práce. Proto jsou v práci zahrnuty také kapitoly 13 a 14, kde se věnujeme hrám, které nejsou rozebrány podrobně. Tyto kapitoly jsou spíše takovým úvodem, jehož účelem je seznámit se s dalšími hrami a odkázat se na jiné práce. Především hra na četníky a zloděje je široké téma, kde je hodně způsobů, jak se můžeme hrou zabývat. Vzhledem k rozsáhlosti hry však v rámci tématu naší práce nebyl prostor věnovat se hře podrobněji, ale je to jedna z her, na kterou je možné dobře navázat. Celkově práce nabízí přehled mnoha zdrojů, kde jsou k dispozici rozšířené informace k vybraným hrám a je možné z nich čerpat v dalších pracích, které se mohou věnovat konkrétně jedné hře, nebo širšímu tématu.

Nakonec si ještě uvedeme odkazy na hry, kde je možné si danou hru přímo vyzkoušet. Většinu her je možné hrát na počítači proti lidem, nebo proti softwaru. Jen u hry na četníky a zloděje a Conway's Soldiers se mi nepodařilo najít odkaz na hru a u andělova problému jsem našel pouze omezenou variantu hry, kde si můžeme vyzkoušet pouze platnost jednoho z důkazů. U ostatních her je buď možné hrát hru přímo online v prohlížeči, nebo stáhnout aplikaci. V tabulce č.3 jsou odkazy, kde jsou vybrané hry dostupné a může si kdokoliv sám vyzkoušet, jak fungují popsané strategie a jak obtížné je hrát proti různým úrovním počítače.

Hra	Hráči	Remíza	Existence strategií
Šprouti	2	Ne	VS různá podle počátečního počtu vrcholů
Hex	2	Ne	VS první hráč
Sim	2	Ne	VS druhý hráč
Hexapawn	2	Ano	NS oba hráči
Andělův problém	2	Ne	Pro k > 1 VS anděl, Pro k = 1 VS ďábel
Chomp	2	Ne	VS první hráč
Conway Soldiers	1	Ne	Lze dosáhnout maximálně čtvrté řady
Piškvorky	2	Ano	NS vždy první hráč, VS podle velikosti hracího plánu
Tic-tac-toe 3x3	2	Ano	NS oba hráči
Trojrozměrné piškvorky	2	Ano	Pro 3x3x3 a 4x4x4 VS první hráč, jinak NS první hráč
Bridge-It	2	Ne	VS první hráč
Hra na četníky a zloděje	2	Ne	Různá podle parametrů hry

Tabulka 1: Přehled existence strategií

Hra	Řešení hry
Šprouti	Známo jen pro některý počet vrcholy,maximálně pro 53
Šprouti - misère	Známo jen pro počet počátečních vrcholů menších než 21
Podvodní Šprouti	Hra je kompletně vyřešena
Hex - bez možnosti vyměnit tah	Známo jen do rozměrů hracího plánu nejvýše 10x10
Hex - s možností vyměnit tah	Známo jen do rozměrů hracího plánu nejvýše 9x9
Sim	Hra je kompletně vyřešena
Hexapawn	Hra je kompletně vyřešena
Andělův problém	Hra je kompletně vyřešena
Chomp	Známo jen pro speciální typy hracího plánu
Conway Soldiers	Hra je kompletně vyřešena
Piškvorky	Hra je kompletně vyřešena
Tic-tac-toe 3x3	Hra je kompletně vyřešena
Trojrozměrné piškvorky	Známo jen pro hrací plány 3x3x3 a 4x4x4
Bridge-It	Hra je kompletně vyřešena
Hra na četníky a zloděje	Známo jen pro některé grafy

Tabulka 2: Přehled řešení hry

Hra	Odkaz
Šprouti	http://http://www.reisz.de/3graph_en.htm
Hex	http://www.lutanho.net/play/hex.html
Sim	https://share.catrob.at/pocketcode/program/1478
Hexapawn	http://www.zillionsofgames.com
Andělův problém	http://home.broadpark.no/∼ oddvark/angel/demo.html
Chomp	https://cariboutests.com/games/chomp.php?lang=en
Piškvorky	http://www.duelovky.cz/piskvorky
Tic-tac-toe 3x3	http://ostermiller.org/calc/tictactoe.html
Trojrozměrné piškvorky	http://multihry.cz/logicke/3d-piskvorky
Bridge-It	https://scratch.mit.edu/projects/1252486/

Tabulka 3: Odkazy na hry

Zdroje k obrázkům

Většina obrázků, které obsahuje má práce, je stažena z internetu. Zde si uvedeme zdroje, kde se obrázky nacházejí a ze kterých jsem čerpal.

1-4: Tabulky hry Šprouti: https://en.wikipedia.org/wiki/Sprouts_(game)
5: Hrací plán Hexu: https://en.wikipedia.org/wiki/Hex_(board_game)
6: Triangulace: http://skomam.vsb.cz/archiv/2015/files/prednasky/M_Kubesa.pdf
8: Hrací plán Simu: https://en.wikipedia.org/wiki/Sim_(pencil_game)
9 a 11: Hexapawn 3x3: Robert Price. http://www.chessvariants.com/small.dir/hexapawn.html
10: Hexapawn herní strom: http://www.seas.upenn.edu/∼ cis391/Lectures/Games.pdf
12: Anděl herní pozice:. https://en.wikipedia.org/wiki/Angel_problem

13-16: Anděl důkazy č. 1 a 2: Martin Kutz.
http://www.diss.fu-berlin.de/diss/receive/FUDISS_thesis_000000001344

17-18: Anděl důkaz č. 3: Oddvar Kloster.
http://home.broadpark.no/∼ oddvark/angel/kloster.html

22: Conway soldiers: Jeremy Rouse. http://users.wfu.edu/parslerj/math165/rouse-soldiers.pdf

34 a 36: Tic-tac-toe 1: József Beck.
http://www.helsinki.fi/∼ kulikov/matem/BeckCombinatorialGames.pdf

35: Tic-tac-toe 2: Michal Musílek. http://www.musilek.eu/michal/piskvorky/Minipiskvorky.pdf

37-39: Bridge-it: Bohdan Zelinka.
http://dml.cz/bitstream/handle/10338.dmlcz/403955/SkolaMladychMatematiku_044-1979-1_11.pdf

40-41: Kostry grafu: Sandy Dean. http://digitalcommons.unl.edu/mathmidexppap/10/

42-43: Hra na četníky a zloděje: Shelley Stahl.
http://rachel-stahl.grad.uconn.edu/wp-content/uploads/sites/1932/2016/10/N.E.R.D.S.-slides-Nov-2016.pdf

44: Cop-number přehled: Tomáš Gavenčiak. https://is.cuni.cz/webapps/zzp/detail/70457/

Literatura

[1] KOVÁŘ, Petr. *Úvod do teorie grafů* [elektronická skripta]. VŠB-TU Ostrava. 2016 [cit. 2017-04-25]. Dostupné z: http://homel.vsb.cz/∼ kov16/files/uvod_do_teorie-grafu.pdf

[2] SAWA, Zdeněk. *Teorie Her* [elektronická sktipta]. VŠB-TU Ostrava. 2015 [cit. 2017-04-25]. Dostupné z: http://www.cs.vsb.cz/sawa/teh/opora/TEH-opora.pdf

[3] Přispěvatelé Wikipedie. *Strategy-stealing argument* [online]. Wikipedie: Otevřená encyklopedie. Poslední změna 24.1.2017 [cit. 2017-04-25]. Dostupné z: https://en.wikipedia.org/wiki/Strategy-stealing_argument

[4] Přispěvatelé Wikipedie. *Sprouts_(game)* [online]. Wikipedie: Otevřená encyklopedie. Poslední změna 24.1.2017 [cit. 2017-04-25]. Dostupné z: https://en.wikipedia.org/wiki/Sprouts_(game)

[5] APPLEGATE, David. - JACOBSON, Guy. - SLEATOR, Daniel. *Computer Analysis of Sprouts* [online]. Carnegie Mellon University. 1991, Poslední změna 9.4.2007 [cit. 2017-04-25] Dostupné z: http://www.cs.cmu.edu/∼ sleator/papers/Sprouts.htm

[6] LEMOINE, Juline. - VIENNOT, Simon. *Computation records of normal snad misère Sprouts* [online]. Poslední změna 15.5.2013 [cit. 2017-04-25] Dostupné z: http://sprouts.tuxfamily.org/wiki/doku.php?id=records

[7] KUBESA, Michal. *Spernerovo lemma* [online]. VŠB-TU Ostrava. 2015 [cit. 2017-04-25]. Dostupné z: http://skomam.vsb.cz/archiv/2015/files/prednasky/M_Kubesa.pdf

[8] MAARUP, Thomas. *Hex* [online]. University of Southern Dennmark. 2005 [cit. 2017-04-25]. Dostupné z: http://maarup.net/thomas/hex/hex3.pdf

[9] PAWLEWICZ, Jakub. *Seminarium Gry, Mechanizmy i Sieci Społeczne* [online]. University of Warsaw. 2015 [cit. 2017-04-25]. Dostupné z: https://www.mimuw.edu.pl/en/game-hex-solving-10x10-board-1

[10] Přispěvatelé Wikipedie. *Ramseyho_teorie* [online]. Wikipedie: Otevřená encyklopedie. Datum poslední změny 21.3.2017 [cit. 2017-04-25]. Dostupné z: https://cs.wikipedia.org/wiki/Ramseyho_teorie

[11] MAREŠ, Martin. *Ramseyovy věty* [online]. Datum poslední změny 16.5.2016 [cit. 2017-04-25]. Dostupné z: http://mj.ucw.cz/papers/ramsey.pdf

[12] MEAD, Ernest. - ROSA, Alexander. HUANG, Charlotte. The Game of Sim: A Winning Strategy for the Second Player. *Mathematics magazine* [online]. 1974, vol. 47, č. 5, str. 243-247. [cit. 2017-04-25]. Dostupné z: https://www.jstor.org/stable/2688046?seq=1#page_scan_tab_contents

[13] PRICE, Robert. *Robert Price web site* [online]. 2001 [cit. 2017-04-25].
Dostupné z: http://www.chessvariants.com/small.dir/hexapawn.html

[14] Přispěvatelé Wikipedie. *Angel_problem* [online]. Wikipedie: Otevřená encyklopedie.
Datum poslední změny 27.12.2016 [cit. 2017-04-25].
Dostupné z: https://en.wikipedia.org/wiki/Angel_problem

[15] KUTZ, Martin. *The Angel Problem, Positional Games, and Digraph Roots.* Berlín. 2004.
Doctor thesis. University of Berlin. Department of Mathematics and Computer Science.
[cit. 2017-04-25]
Dostupné z: http://www.diss.fu-berlin.de/diss/receive/FUDISS_thesis_000000001344

[16] KLOSTER, Oddvar. *The Angel Problem* [online]. 2010 [cit. 2017-04-25].
Dostupné z: http://home.broadpark.no/∼ oddvark/angel/kloster.html#L1529

[17] BADILLO-RIOS, Salvador. - MOJICA, Verenice. *Mathematical and comuptational analysis of chomp* [online]. 2016 [cit. 2017-04-25]. Dostupné z:
http://docslide.us/documents/mathematical-and-computational-analysis-of-chomp.html

[18] ROUSE, Jeremy. *Conway's Soldiers* [online]. Wake Forest University. 2010 [cit. 2017-04-25].
Dostupné z: http://users.wfu.edu/parslerj/math165/rouse-soldiers.pdf

[19] ALLIS, Victor. *Searching for Solutions in Games and Artificial Intelligence* [online]. 1994
[cit. 2017-04-25]. Dostupné z: http://fragrieu.free.fr/SearchingForSolutions.pdf

[20] PATASHNIK, Oren. Qubic: 4x4x4 Tic-Tac-Toe. *Mathematics magazine* [online].
1980, vol. 53, č. 4, str. 202-2016. [cit. 2017-04-25].
Dostupné z: https://www.jstor.org/stable/2689613?seq=1#page_scan_tab_contents

[21] BELL, George. *Peg solitaire army* [online]. 2006, Poslední změna 14.11.2015
[cit. 2017-04-25]. Dostupné z: http://www.gibell.net/pegsolitaire/army/index.html

[22] BECK, József. *Combinatorial games: Tic-Tac-Toe Theory* [online]. Cambridge University Press. 2008.
Dostupné z: http://www.helsinki.fi/∼ kulikov/matem/BeckCombinatorialGames.pdf

[23] MUSÍLEK, Michal. Čtvercové, krychlové a teseraktové minipiškvorky [online]. 2006
[cit. 2017-04-25]. Dostupné z: http://www.musilek.eu/michal/piskvorky/Minipiskvorky.pdf

[24] ZELINKA, Bohdan. *Matematika hrou i vážně* [online]. 1979 [cit. 2017-04-25].
Dostupné z: http://dml.cz/dmlcz/403955

[25] DEAN, Sandy. *The game of bridg-it* [online]. University of Nebraska - Lincoln. 2008
[cit. 2017-04-25]. Dostupné z: http://digitalcommons.unl.edu/mathmidexppap/10/

[26] VELAN, Dominik. *Patrolovací hry na grafech*. Brno. 2015. Bakalářská práce. Fakulta Informatiky, Masarykova Univerzita.
Dostupné z: https://is.muni.cz/th/393839/fi_b/bakalarka.pdf

[27] BARILE, Margherita. *Dots and Boxes* [online]. Z MathWorld–A Wolfram Web Resource, vytvořil Eric W. Weisstein. Poslední změna 21.4.2017. [cit. 2017-04-25].
Dostupné z: http://mathworld.wolfram.com/DotsandBoxes.html

[28] KUNZOVÁ, Kristýna. *Hra nim a její varianty*. Praha. 2014. Závěrečná práce. Matematicko-fyzikální fakulta, Univerzita Karlova v Praze.
Dostupné z: http://kdm.karlin.mff.cuni.cz/diplomky/czv/nim.pdf

[29] THOMPSON, Mark. Twixt [online].
Dostupné z: /http://home.flash.net/∼ markthom/html/twixt.html

[30] FREELING, Christian. Havannah [online].
Dostupné z: http://mindsports.nl/index.php/arena/havannah

[31] The game of chomp [online]. [cit. 2017-04-25].
Dostupné z: https://www.win.tue.nl/∼ aeb/games/chomp.html

[32] STAHL, Shelley. *Recursion Theoretic Results for the Game of Cops and Robbers on Graphs* [online]. University of Connecticut. 2016 [cit. 2017-04-25]. Dostupné z: http://rachel-stahl.grad.uconn.edu/wp-content/uploads/sites/1932/2016/10/N.E.R.D.S.-slides-Nov-2016.pdf

[33] GAVENČIAK, Tomáš. *Structural and complexity questions of graph theory*. Praha. 2007. Doktorská práce. Fakulta matematiky a fyziky, Karlova Univerzita v Praze.
Dostupné z: https://is.cuni.cz/webapps/zzp/detail/70457/